Aufgabe A1: $(15 \times 2 = 30$ Punkte) *Antworten sind zu begründen!*

a) Berechnen Sie den Binomialkoeffizienten $\binom{2a}{2a-2}$, wobei $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist.

Der Binomialkoeffizient $\binom{2a}{2a-2}$ ist (setze $n = 2a$ und $k = 2a - 2$ in der Definition $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$)

$$\frac{(2a)!}{(2a-2)! \cdot (2a-(2a-2))!} = \frac{(2a)!}{(2a-2)! \cdot 2!} = \frac{2a(2a-1)}{2} = a(2a-1)$$

b) Berechnen Sie die Formel der Umkehrfunktion von $x \mapsto \log_5(x^3 + 2)$.

Wir haben $y = \log_5(x^3 + 2)$ daher ist $5^y = x^3 + 2$ also $x = \sqrt[3]{5^y - 2}$

c) Berechnen Sie die Gerade, die die Funktion $x \mapsto c \cdot e^{3cx}$ in geeigneten logarithmischen Koordinaten ergibt, wobei $c \in \mathbb{R}_{>0}$ ist.

Wir haben $f(x) = c \cdot e^{3cx}$ und $\ln f(x) = \ln(ce^{3cx}) = \ln(c) + \ln(e^{3cx}) = \ln(c) + 3cx$. In logarithmischen Koordinaten bekommen wir daher $y = 3c \cdot x + \ln(c)$

d) Berechnen Sie die Verkettung $g \circ f(x)$ von $f(x) = e^x$ und $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{3 + x}$.

Zunächst ist $y = f(x) = e^x$ und danach $g(y) = \dfrac{\ln(y)}{3 + y}$. Also ist

$$g \circ f(x) = g(e^x) = \frac{\ln(e^x)}{3 + e^x} = \frac{x}{3 + e^x}$$

e) Wieviel 7,5%-ige Lösung bekommt man aus 450 ml einer 9%-igen Lösung?

Das Verhältnis ist $\frac{7{,}5}{9} = \frac{5}{6}$ also bekommt man $\frac{6}{5} \cdot 450ml = 540$ ml.

f) Ist die Funktion $-\dfrac{1}{e^x}$ streng monoton wachsend oder fallend?

Streng monoton wachsend: Die Funktion $(\frac{1}{e})^x$ ist streng monoton fallend, da $0 < \frac{1}{e} < 1$. Folglich ist $-\frac{1}{e^x} = -(\frac{1}{e})^x$ streng monoton wachsend.

g) Berechnen Sie die minimale Periode von $-5 \cdot \sin(\frac{3}{4}(x + 2)) - 1$

Wichtig für die Periode ist hier nur $\frac{3}{4}x$ statt x. Die minimale Periode der Sinusfunktion ist 2π. Also ist die neue minimale Periode $\frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{8}{3}\pi$

h) Berechnen Sie den Wertebereich von $x^2 - 8x$ auf dem Intervall $(3, 5)$.

Diese quadratische Funktion hat ein Minimum für $x = 4$. Die Funktion ist stetig, und auf $(3, 4]$ streng monoton fallend, und auf $[4, 5)$ streng monoton wachsend. Die entsprechenden Werte sind $-15, -16, -15$. Daher ist die Bildmenge

$$[-16, -15) \cup [-16, -15) = [-16, -15)$$

i) Ist die Funktion $\{1, 2, 3, 4\} \to \{A, B, C\} \qquad 1 \mapsto C, 2 \mapsto A, 3 \mapsto B, 4 \mapsto A$ injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv?

Die Funktion ist surjektiv, da A, B, C Urbilder besitzen (z.B. 2,3,1). Die Funktion ist nicht injektiv, da 2 und 4 dasselbe Bild besitzen. Die Funktion ist nicht bijektiv, da nicht injektiv.

j) Eine biologische Grösse wächst exponentiell alle 3 Wochen um 80%. Welche ist die entsprechende Prozentzahl für 2 Wochen (gerundet)?

Jeweils nach 3 Wochen bekommen wir $180\% = 1,8$ des vorherigen Wertes. Jede Woche also $\sqrt[3]{1,8}$ des vorherigen Wertes und alle 2 Wochen $(\sqrt[3]{1,8})^2 = (1,8)^{\frac{2}{3}} = 1,479\ldots \sim 1,5$ davon. Die Prozentzahl ist daher 50%.

k) Berechnen Sie das geometrische und das harmonische Mittel der Zahlen $1; 1; 2; 3$.

$$GM = \sqrt[4]{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{6} \qquad HM = \frac{4}{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{6+6+2+3}{6}} = \frac{24}{17}$$

l) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariabeln mit Werten $-1; 0; 1$ und entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$.

$$EW = \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0 \qquad V = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2} \qquad SA = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

m) 60% einer bestimmten Population seien Frauen, 40% Männer. 6% der Frauen und 4% der Männer seien zuckerkrank. Sind die Ereignisse „eine Person ist zuckerkrank" und „eine Person ist weiblich" unabhängig?

M: die ausgewählte Person ist männlich , F: die ausgewählte Person ist weiblich , Z: die ausgewählte Person ist zuckerkrank. Wir wissen $P(Z \mid M) = 0,04$ und $P(Z \mid F) = 0,06$. Die Ereignisse Z und F sind nicht unabhängig, da $P(Z \mid F) \neq P(Z \mid M)$ ist.

n) Betrachte die Basen A, C, G, T. Wieviele mögliche DNA Sequenzen gibt es für 3 Basenstellen? Und dieselbe Frage, wenn es nur verschiedene Basen vorkommen?

1) Die drei Wahlen sind unabhängig, die Reihenfolge ist von Bedeutung, also $4^3 = 64$.

2) Die Reihenfolge ist von Bedeutung, ohne Wiederholungen, $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

o) Betrachten wir eine Reihe von Bernoulli-Experimenten (das erste der beiden Ergebnisse hat Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$). Welche ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 5 Experimenten das erste Ergebnis genau 2 mal vorkommt?

Die Formel ist

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

wobei $n = 5$, $k = 2$, $p = \frac{1}{3}$. Also bekommen wir

$$\binom{5}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^3 = 10 \cdot 8 \cdot 3^{-5} = \frac{80}{243}$$

Aufgabe A2: (3+2+5=10 Punkte)

a) Berechnen Sie folgende Summe: $\displaystyle\sum_{k=10}^{20} -4 \cdot 2^k \cdot (\frac{7}{8})^k$

Wir haben eine geometrische Reihe $\sum_{k=10}^{20} q^k$ für $q = \frac{7}{4}$.

Wir wissen $\sum_{k=0}^{20} q^k = \frac{q^{21}-1}{q-1}$ und $\sum_{k=0}^{9} q^k = \frac{q^{10}-1}{q-1}$ also ist

$$\sum_{k=10}^{20} q^k = \sum_{k=0}^{20} q^k - \sum_{k=0}^{9} q^k = \frac{q^{21}-1}{q-1} - \frac{q^{10}-1}{q-1} = \frac{q^{21}-q^{10}}{q-1} = q^{10} \cdot \frac{q^{11}-1}{q-1}$$

In diesem Fall bekommen wir

$$-4 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{10} \cdot \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{11} - 1}{\frac{7}{4} - 1} = \frac{-16}{3} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{10} \cdot ((\frac{7}{4})^{11} - 1)$$

b) Berechnen Sie folgenden Grenzwert: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{5n^4 + n^2 + 5}{9 - n^4}\right)$

Die rationale Funktion $\frac{5n^4+n^2+5}{9-n^4}$ hat denselben Grenzwert wie $\frac{5n^4}{-n^4} = -5$. Deswegen gilt $\exp\left(\frac{5n^4+n^2+5}{9-n^4}\right) \longrightarrow e^{-5}$.

c) Bestimmen Sie die Folge mit Anfangswert $a_0 = 2$ und Rekursion $a_{n+1} - 5 \cdot a_n = -3$

Die homogene Rekursion ist $a_{n+1} - 5 \cdot a_n = 0$ und die Lösungen sind $a_n = C \cdot 5^n$, wobei $C \in \mathbb{R}$ ist.

Eine spezielle Lösung der Rekursion $a_{n+1} - 5 \cdot a_n = -3$ ist eine Konstante K, sodass $K - 5K = -3$, also $K = \frac{3}{4}$.

Die allgemeine Lösung der gegebenen Rekursion ist daher

$$a_n = C \cdot 5^n + \frac{3}{4}$$

Wenn der Anfangswert $a_0 = 2$ sein muss, bekommen wir

$$2 = C \cdot 5^0 + \frac{3}{4} \qquad C = \frac{5}{4}$$

Also ist die gesuchte rekursive Folge

$$a_n = \frac{5}{4} \cdot 5^n + \frac{3}{4}$$

Aufgabe A3: ($6 \times 5 = 30$ Punkte)

$$\frac{x-2}{4} - \frac{2x^2}{x-2} = 0 \qquad |7x-4| > 5x \qquad \log_2\left(\frac{x^6}{2 \cdot x^3}\right) = 4 \qquad x^2 - 4x + 9 = 0$$

$$\int_{-1}^{2} 5x^2 \cdot \sin(\pi x^3 + \pi)\, dx \qquad\qquad \int_{2}^{+\infty} \frac{-3}{\sqrt{x}}\, dx$$

Es gilt $(x-2)(x-2) - 8x^2 = 0$ also $-7x^2 - 4x + 4 = 0$ Die Lösungen sind

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4^2) - 4 \cdot 4 \cdot (-7)}}{-14} = \frac{4 \pm \sqrt{16(1+7)}}{-14} = -\frac{2}{7} \pm \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Die Gleichung ist nur für $x \neq 2$ wohldefiniert aber diese Lösungen sind gültig.

Die Bedingung $7x - 4 \geq 0$ bedeutet $x \geq \frac{4}{7}$ und $7x - 4 < 0$ bedeutet $x < \frac{4}{7}$. Die Bedingung $7x - 4 > 5x$ ergibt $x > 2$. Die Bedingung $-(7x-4) > 5x$ ergibt $12x < 4$ d.h. $x < \frac{1}{3}$.

Also entweder $x \geq \frac{4}{7}$ und $x > 2$ oder $x < \frac{4}{7}$ und $x < \frac{1}{3}$.

Der erste Fall ist $x > 2$ und der zweite Fall ist $x < \frac{1}{3}$. Insgesamt ist daher die Lösungsmenge $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (2, +\infty)$.

$$\log_2\left(\frac{x^6}{2 \cdot x^3}\right) = 4 \qquad \log_2\left(\frac{x^3}{2}\right) = 4 \qquad 3\log_2(x) - 1 = 4$$

$$\log_2(x) = \frac{5}{3} \quad x = 2^{\frac{5}{3}}$$

Die Gleichung ist nur für $x > 0$ wohldefiniert aber diese Lösung ist dann gültig.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 9 = 16 - 36 = -20 = (i \cdot 2\sqrt{5})^2$ also

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm i \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \cdot i$$

$$\int_{-1}^{2} 5x^2 \cdot \sin(\pi x^3 + \pi)\, dx \qquad = \frac{5}{3\pi} \quad \int_{-1}^{2} 3\pi x^2 \cdot \sin(\pi x^3 + \pi)\, dx$$

Wir benutzen die Substitutionsregel für die Funktion $y = \pi x^3 + \pi$. Es gilt $y' = 3\pi x^2$ deswegen übersetzen wir

$$dy = 3\pi x^2 dx$$

Die Integrationsgrenzen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ entsprechen $y_1 = 0$ und $y_2 = 9\pi$. Also bekommen wir:

$$\frac{5}{3\pi} \cdot \int_0^{9\pi} \sin(y)\, dy = \frac{5}{3\pi} \cdot (-\cos(y)) \mid_0^{9\pi} = \frac{-5}{3\pi}[\cos(9\pi) - \cos(0)] = \frac{-5}{3\pi}[(-1) - 1] = \frac{10}{3\pi}$$

Da $1/2 > 0$ gilt

$$\lim_{t \to +\infty} t^{1/2} = +\infty$$

und folglich

$$\int_2^{+\infty} \frac{-3}{\sqrt{x}}\, dx = -3 \lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = -3 \lim_{t \to +\infty} 2x^{1/2} \mid_2^t = -6 \lim_{t \to +\infty} (t^{1/2} - \sqrt{2}) = (-6) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Aufgabe A4: (20 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$. Bestimmen Sie:

a) (1P) Die maximale Definitionsmenge. (Mit Begründung). $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$

Für $x = 0$ ist $\ln(x^2)$ nicht definiert und für $x = \pm 1$ haben wir im Nenner $\ln(1) = 0$

b) (1P) Ist die Funktion gerade oder ungerade? (Mit Begründung).

Die Funktion ist ungerade, da $f(-x) = \dfrac{-x}{\ln((-x)^2)} = -\dfrac{x}{\ln(x^2)}$

c) (4P) Die vier Grenzwerte am Rand der Definitionsmenge für $f(x)$ (nur für $\mathbb{R}_{\geq 0}$).

Nach de l'Hospital (für den 1. Schritt im 1. Grenzwert)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x^2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} \cdot 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln(x^2)}=\frac{0^+}{-\infty}=0^-$$

Für $x>1$ ist $x^2>1$ daher $\ln(x^2)>0$ und für $0<x<1$ ist $x^2<1$, daher $\ln(x^2)<0$:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln(x^2)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\ln(x^2)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

d) (2P+2P) Berechnen Sie $f'(x)=\dfrac{\ln(x^2)-2}{\ln^2(x^2)}$ und $f''(x)=\dfrac{8-2\ln(x^2)}{x\ln^3(x^2)}$.

$$f'(x)=\frac{1\cdot\ln(x^2)-x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{\ln^2(x^2)}=\frac{\ln(x^2)-2}{\ln^2(x^2)}$$
$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot\ln^2(x^2)-(\ln(x^2)-2)\cdot 2\ln(x^2)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{\ln^4(x^2)}$$
$$=\frac{\frac{2}{x}\ln^2(x^2)-(\ln(x^2)-2)\cdot 2\ln(x^2)\cdot\frac{2}{x}}{\ln^4(x^2)}=\frac{2\ln(x^2)-(\ln(x^2)-2)\cdot 2\cdot 2}{x\ln^3(x^2)}$$

$$=\frac{8-2\ln(x^2)}{x\ln^3(x^2)}$$

e) (3P) Das Monotonieverhalten von f, die lokalen Extrema und deren Typ (nur für $\mathbb{R}_{\geq 0}$).

Die Bedingung $f'(x)=0$ hat man für $\ln(x^2)-2=0$ also $\ln(x^2)=2$ also $x^2=e^2$ also $x=\pm e$.

Es gilt $\ln^2(x^2)>0$ auf der Definitionsmenge. Die Bedingung $f'(x)\geq 0$ hat man daher für $\ln(x^2)-2\geq 0$. Diese Ungleichung ist $\ln(x^2)\geq 2$ also $x^2\geq e^2$. Dies bedeutet $|x|\geq|e|$. Das Monotonieverhalten ist: auf $(0,1)$ monoton fallend; auf $(1,e)$ monoton fallend; auf [e,+∞) monoton wachsend.

Die Nullstelle der ersten Ableitung ist e. Wegen der Monotonie ist das ein lokales Minimum.

f) (3P) Die Konkavität/Konvexität und die Wendestelle von f und deren Typ (für $\mathbb{R}_{\geq 0}$).

Die Bedingung $f''(x)=0$ bedeutet $8-2\ln(x^2)=0$ also $\ln(x^2)=4$, dies ergibt $x^2=e^4$ und $x=\pm\sqrt{e^4}=\pm e^2$.

Es ist $x \ln^3(x^2) > 0$ für $x > 1$ und $x \ln^3(x^2) < 0$ für $x < 1$.

Es ist $8 - 2\ln(x^2) > 0$ d.h. $\ln(x) < 2$ für $0 < x < e^2$ und es ist $8 - 2\ln(x^2) < 0$ d.h. $\ln(x) > 2$ für $x > e^2$.

Die Funktion ist daher auf $(0, 1)$ konkav, auf $(1, e^2)$ konvex und auf $(e^2, +\infty)$ konkav.

Wegen der Konkavität ist e^2 eine links-rechts Wendestelle.

g) (1P) Die Bildmenge (Mit kleiner Begründung).

Das Bild von $(0, 1)$ ist gleich $\mathbb{R}_{<0}$ und das Bild von $(-1, 0)$ gleich $\mathbb{R}_{>0}$. Der Wert 0 wird nicht angenommen. Also: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

h) (3P) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f (nur für $\mathbb{R}_{\geq 0}$) und beschreiben Sie

$$g(x) = \frac{7 \cdot (2x - 3)}{\ln(4x^2 - 12x + 9)}$$

Der Graph muss die richtigen Grenzwerte zeigen. Der Graph muss das lokale Minimum zeigen, und die richtige Monotonie und Konvexität.

Schreiben wir

$$g(x) = \frac{2x - 3}{\ln((2x - 3)^2)}$$

Also gibt es folgende Schritte:

$$x \rightsquigarrow x - \frac{3}{2} \rightsquigarrow 2(x - \frac{3}{2})$$

Eine x-Verschiebung des Graphen um $\frac{3}{2}$ nach rechts und danach eine x-Stauchung des Graphen mit Faktor 2.

Aufgabe A5: (10 Punkte)

(2P) Berechnen Sie den Wert der folgenden Funktion an der Stelle $(\pi, -\frac{7}{2})$.

(2P) Berechnen Sie die Einschränkung der folgenden Funktion auf die Gerade $y = 3x$.

(6P) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ der folgenden Funktion.

$$f(x, y) = 2 \cdot \sqrt[3]{xy^2} + \sin(xy)$$

Es gilt

$$f(\pi, -\frac{7}{2}) = 2 \cdot \sqrt[3]{\pi \frac{49}{4}} + \sin(-\frac{7}{2}\pi) = \sqrt[3]{98\pi} + 1$$

Mit $y = 3x$ ist

$$x \mapsto g(x) = f(x, 3x) = 2 \cdot \sqrt[3]{x \cdot 9x^2} + \sin(x \cdot 3x) = 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} x + \sin(3x^2)$$

Es ist

$$f(x, y) = 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} + \sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{-\frac{1}{3}} + x \cdot \cos(xy) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{3}} + x \cdot \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{3}} + \cos(xy) + x \cdot (-\sin(xy)) \cdot y =$$

$$= \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} + \cos(xy) - xy \cdot \sin(xy)$$