

Aufgabe A1: ($15 \times 2 = 30$ Punkte) *Antworten begründen!*

- a) Berechnen Sie den Binomialkoeffizienten $\binom{a}{a-4}$, wobei $a \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ ist.

Der Binomialkoeffizient $\binom{a}{a-4}$ ist (setze $n = a$ und $k = a - 4$ in der Definition $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$)

$$\frac{a!}{(a-4)! \cdot (a - (a-4))!} = \frac{a!}{(a-4)! \cdot 4!} = \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24}$$

- b) Ist die Funktion $-\frac{x^9}{x^3}$ gerade oder ungerade oder keines von beiden?

Wir haben die Funktion $f(x) = -\frac{x^9}{x^3}$. Wir berechnen

$$f(-x) = -\frac{(-x)^9}{(-x)^3} = -\frac{-x^9}{-x^3} = -\frac{x^9}{x^3} = f(x)$$

Daher ist die Funktion gerade.

- c) Berechnen Sie die Formel der Umkehrfunktion von $x \mapsto \log_{10}(x^5 + 2)$, wobei $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Wir haben $y = \log_{10}(x^5 + 2)$ daher ist $10^y = x^5 + 2$ also

$$x = \sqrt[5]{10^y - 2}$$

- d) Berechnen Sie die Tangente und das erste Taylorpolynom der Funktion $2x^3 - x^2 + 2$ in $x = 1$

Wir haben $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2$ also $f'(x) = 6 \cdot x^2 - 2x$ und $f'(1) = 4$. Ein Punkt auf der Tangente ist $(1, f(1)) = (1, 3)$. Es gilt für die Tangente

$$y - 3 = 4(x - 1) \quad y = 4x - 1$$

Das erste Taylorpolynom ist $T(x) = 3 + 4(x - 1)$.

- e) Berechnen Sie die Verkettung $g \circ f(x)$ von $f(x) = e^x$ und $g(x) = \frac{-x^3}{2}$

Zunächst ist $y = f(x) = e^x$ und danach $g(y) = \frac{-y^3}{2}$ Also ist

$$g \circ f(x) = g(e^x) = \frac{-(e^x)^3}{2} = -\frac{e^{3x}}{2}$$

- f) Wieviel 15%-ige Lösung muss man benutzen, um 12,0 ml verdünnte 12%-ige Lösung herzustellen?

Das Verhältnis ist $\frac{12}{15}$ also wurden $\frac{12}{15} \cdot 12 = \frac{144}{15} = 9,6$ ml von den konzentrierten Lösung benutzt.

- g) Ist die Funktion 2^{-x} streng monoton wachsend oder streng monoton fallend?

Streng monoton fallend: Die Funktion $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ist streng monoton fallend, da $0 < \frac{1}{2} < 1$ ist.

- h) Berechnen Sie die minimale Periode von $-7 \cdot \sin\left(\frac{8}{5}x - 1\right) + 3$

Wichtig für die Periode ist hier nur $\frac{8}{5}x$ statt x . Die minimale Periode der Sinusfunktion ist 2π . Also ist die neue minimale Periode $\frac{5}{8} \cdot 2\pi = \frac{5}{4} \cdot \pi$

- i) Berechnen Sie den Wertebereich von $-2(x^2 - 6x + 9)$ auf dem Intervall $(0, 5)$

Diese quadratische Funktion hat ein Maximum für $x = 3$. Die Funktion ist stetig, und auf $(0, 3]$ streng monoton wachsend, und auf $[3, 5)$ streng monoton fallend. Die entsprechenden Werte sind $-18, 0, -8$. Daher ist die Bildmenge

$$(-18, 0] \cup (-8, 0] = (-18, -8)$$

- j) Ist die Funktion $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{A, B, C, D\}$ $3 \mapsto A, 1 \mapsto D, 2 \mapsto C$

injektiv oder surjektiv oder bijektiv, oder keines von diesen?

Die Funktion ist nicht surjektiv, da B kein Urbild hat. Insbesondere ist die Funktion nicht bijektiv. Die Funktion ist injektiv, da die Bilder der drei Elemente der Definitionsmenge verschieden sind.

- k) Berechnen Sie den Erwartungswert und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen X mit Werten 2, 3, 5 mit Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}$, 15% und 0,6.

Der Erwartungswert ist

$$E(X) = 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,6 = 3,95$$

Die Varianz ist

$$D^2(X) = (2 - 3,95)^2 \cdot 0,25 + (3 - 3,95)^2 \cdot 0,15 + (5 - 3,95)^2 \cdot 0,6 = 1,7475$$

Die Standardabweichung ist daher $\sqrt{1,7475} \sim 1,32$

- l) Eine biologische Grösse wächst exponentiell alle 4 Monate um 30%. Was ist der Wachstumsfaktor für 3 Monate?

Jeweils nach 4 Monaten bekommen wir $130\% = 1,3$ des vorherigen Wertes. Jeden Monat also $\sqrt[4]{1,3}$ des vorherigen Wertes und alle 3 Monate $(\sqrt[4]{1,3})^3 = (1,3)^{3/4} \sim 1,2$ davon.

m)

Es gäbe viele mögliche andere Fragen. Einige weitere Themen: Bedingte Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, Unabhängigkeit von Ereignissen zu bestimmen (ob sie gilt oder nicht), gewichtetes arithmetisches Mittel, geom. und harm. Mittel, Varianz und Standardabweichung einer Messreihe, diskrete Binomialverteilung. Aber auch aus alten Themen zB: Logarithmische Koordinaten (eine Exponentialfunktion wird z.B. eine Gerade, die zu bestimmen ist); Umwandlung von Grössen und entsprechendes sinnvolles Runden, Mengenlehre und Logik, Kombinatorik...

Aufgabe A2: (3+2+5=10 Punkte)

a) Berechnen Sie folgende Summe: $a_n = -8 \cdot \sum_{k=15}^{25} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

Wir haben eine geometrische Reihe $\sum_{k=15}^{25} q^k$ für $q = \frac{3}{4}$.

Wir wissen $\sum_{k=0}^{25} q^k = \frac{q^{26} - 1}{q - 1}$ und $\sum_{k=0}^{14} q^k = \frac{q^{15} - 1}{q - 1}$ also ist

$$\sum_{k=15}^{25} q^k = \sum_{k=0}^{25} q^k - \sum_{k=0}^{14} q^k = \frac{q^{26} - 1}{q - 1} - \frac{q^{15} - 1}{q - 1} = \frac{q^{26} - q^{15} - 1 + 1}{q - 1} = q^{15} \cdot \frac{q^{11} - 1}{q - 1} \quad (1 + 1P)$$

In diesem Fall bekommen wir

$$-8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{11} - 1}{\frac{3}{4} - 1} = -32 \cdot (0,75)^{15} \cdot (1 - (0,75)^{11}) \sim -32 \cdot (0,75)^{15} \sim 0,4$$

Bem: die Abschätzung ist optional.

b) Berechnen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{8n^4 + 12}{3 + 3n^4}\right)$$

Die rationale Funktion $\frac{8n^4 + 12}{3 + 3n^4}$ hat denselben Grenzwert wie $\frac{8n^4}{3n^4} = \frac{8}{3}$. Deswegen gilt $\ln\left(\frac{8n^4 + 12}{3 + 3n^4}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{8}{3}\right) \sim 0,98$.

c) Bestimmen Sie die rekursive Folge mit Anfangswert $a_0 = 5$ und Rekursion

$$a_{n+1} - 3 \cdot a_n = -2$$

Die homogene Rekursion ist $a_{n+1} - 3 \cdot a_n = 0$ und die Lösungen sind $a_n = C \cdot 3^n$, wobei $C \in \mathbb{R}$ ist.

Eine spezielle Lösung der Rekursion $a_{n+1} - 3 \cdot a_n = -2$ ist eine Konstante K , sodass $K - 3K = -2$, also $K = 1$.

Die allgemeine Lösung der gegebenen Rekursion ist daher

$$a_n = C \cdot 3^n + 1$$

Wenn der Anfangswert $a_0 = 5$ sein muss, bekommen wir

$$5 = C \cdot 3^0 + 1 \quad C = 4$$

Also ist die gesuchte rekursive Folge

$$a_n = 4 \cdot 3^n + 1$$

Aufgabe A3: ($4 \times 5 = 20$ Punkte)

a) mit $x \neq 3$: $\frac{x-1}{3} - \frac{x}{x-3} = 0$

Es gilt $(x-1)(x-3) - 3x = 0$ also $x^2 - 4x + 3 - 3x = 0$ d.h. $x^2 - 7x + 3 = 0$

Die Lösungen sind

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$$

b) $|5x - 2| > 3$

Die Bedingungen $5x - 2 \geq 0$ und $5x - 2 > 3$ ergeben $5x - 2 > 3$ also $5x > 5$ d.h. $x > 1$. Die Bedingung $5x - 2 < 0$ ergibt $x < \frac{2}{5}$. Die Bedingung $-(5x - 2) > 3$ ergibt $-5x + 2 > 3$ also $-5x > 1$ d.h. $x < -\frac{1}{5}$. In diesem zweiten Fall bekommen wir $x < -\frac{1}{5}$. Insgesamt ist die Lösungsmenge $(-\infty, -\frac{1}{5}) \cup (1, +\infty)$.

c) $\log_{0,1}(100 \cdot x^4 \cdot x^4) = 6$

$6 = \log_{0,1}(100 \cdot x^4 \cdot x^4) = \log_{0,1}(100) + \log_{0,1}(x^8) = -2 + \log_{0,1}(x^8)$ (1 + 1P) Also ist $8 = \log_{0,1}(x^8)$ d.h. $(0, 1)^8 = x^8$ und daher $10^{-8} = x^8$, $x = \pm 10^{-1} = \pm 0,1$

d) $x^2 - 4x + 7 = 0$ (die komplexen Lösungen, mit Realteil und Imaginärteil)

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 7 = 16 - 28 = -12 = (i \cdot \sqrt{12})^2 \quad (1+1P) \text{ also}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm i \cdot \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot i = 2 \pm \sqrt{3} \cdot i \quad (2 + 1P)$$

Aufgabe A4: (20 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$. Bestimmen Sie:

- a) (1P) Die maximale Definitionsmenge. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da der Nenner in $x = 0$ nicht definiert ist; für $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$ (für den Logarithmus geeignet)
- b) (2P) Die Grenzwerte am Rand der Definitionsmenge. Nach de l'Hospital (für den 1. Schritt im 1. und 2. Grenzwert)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x^2)}{x} = \frac{-\infty}{0^-} = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

- c) (2P+2P) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung. Kurze Lösung (Zwischenschritte in der Klausur nötig!)

$$f'(x) = (2 - \ln(x^2))/x^2$$

$$f''(x) = (2(\ln(x^2) - 3))/x^3$$

- d) (3P) Das Monotonieverhalten von f . Die Lokale Extrema und deren Typ.

Die Bedingung $f'(x) = 0$ hat man für $2 - \ln(x^2) = 0$ also $\ln(x^2) = 2$ also $x^2 = e^2$ also $x = \pm e$.

Es gilt $x^2 > 0$ auf der Definitionsmenge. Die Bedingung $f'(x) \geq 0$ hat man daher für $2 - \ln(x^2) \geq 0$. Diese Ungleichung ist $\ln(x^2) \leq 2$ also $x^2 \leq e^2$. Dies bedeutet $|x| \leq |e|$. Den Wert $x = 0$ ist aber nicht in der Definitionsmenge.

Die Funktion ist auf $[-e, 0) \cup (0, e]$ monoton wachsend und auf $(-\infty, e] \cup [e, +\infty)$ monoton fallend.

Die Nullstelle der ersten Ableitung sind e und $-e$. Wegen der Monotonie ist das erste ein lokales Minimum und das zweite ein lokales Maximum.

e) (3P) Die Konkavität/Konvexität von f . Die Wendestelle von f und deren Typ.

Die Bedingung $f''(x) = 0$ bedeutet $\ln(x^2) - 3 = 0$ also $\ln(x^2) = 3$, dies ergibt $x^2 = e^3$ und $x = \pm\sqrt{e^3}$.

Die Bedingung $f''(x) > 0$ bedeutet $(\ln(x^2) - 3)/x^3 > 0$. Es muss $x \neq 0$ gelten. Es gibt zwei Fälle: $x > 0$ und $\ln(x^2) - 3 > 0$ bzw. $x < 0$ und $\ln(x^2) - 3 > 0$.

Die Ungleichung $\ln(x^2) - 3 > 0$ ergibt $x^2 > e^3$. Für $x > 0$ bekommen wir $x > \sqrt{e^3}$.

Die Ungleichung $\ln(x^2) - 3 < 0$ ergibt $x^2 < e^3$. Für $x < 0$ bekommen wir $x < -\sqrt{e^3}$.

Die Funktion ist daher auf $(-\infty, -\sqrt{e^3}) \cup (\sqrt{e^3}, +\infty)$ konvex und auf $(-\sqrt{e^3}, 0) \cup (0, \sqrt{e^3})$ konkav.

Wegen der Konkavität ist $-\sqrt{e^3}$ eine links-rechts Wendestelle und $\sqrt{e^3}$ eine rechts-links Wendestelle.

f) (2P) Die Bildmenge.

Wegen der Stetigkeit und der stückweisen Monotonie ist das Bild von $\mathbb{R}_{<0}$ gleich $(f(-e), +\infty)$ und das Bild von $\mathbb{R}_{>0}$ gleich $(-\infty, f(e))$. Wegen $f(e) = 2/e$ und $f(-e) = -2/e$, ist die Bildmenge \mathbb{R} . Anmerkung: Die Funktion ist ungerade, man könnte einfach $\mathbb{R}_{>0}$ betrachten und sämtliche Ergebnisse auf $\mathbb{R}_{<0}$ spiegeln.

g) (5P) Skizzieren Sie qualitativ den Graphen der Funktion f und beschreiben Sie die Funktion¹

$$g(x) = \frac{\ln(2(x-2)^2)}{-2(x-2)} - 2$$

Der Graph muss die richtigen Grenzwerte zeigen. Der Graph muss die lokalen Extrema zeigen, und die richtige Monotonie und Konvexität (für ein Bild, benutze z.B. Wolfram Alpha).

Schreiben wir

$$g(x) = \frac{\ln((\sqrt{2}(x-2))^2)}{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(x-2)} - 2 = \frac{1}{-\sqrt{2}} \cdot f(\sqrt{2}(x-2)) - 2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot f(\sqrt{2}(x-2)) - 2$$

¹die qualitativen Unterschiede müssen beschrieben werden.

Also gibt es folgende Schritte:

$$x \rightsquigarrow x - 2 \rightsquigarrow \sqrt{2}(x - 2)$$

Eine x -Verschiebung des Graphen um 2 nach rechts und danach eine x -Stauchung des Graphen mit Faktor $\sqrt{2}$.

Danach hat man eine Spiegelung an der x -Achse und eine y -Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Schliesslich wird der Graph um 2 nach unten verschoben, mit einer y -Verschiebung.

Aufgabe A5: (5+5=10 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale (Hinweis für das erste Integral: $y = \sin^2(x)$):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \cdot e^{\sin^2(x)} \cdot \sin(x) \cos(x) dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cdot e^{\sin^2(x)} \cdot 2 \sin(x) \cos(x) dx = 4 \int_0^1 e^y dy = 4(e - 1)$$

Wir benutzen die Substitutionsregel für die Funktion $y = \sin^2(x)$. Es gilt $y' = 2 \sin(x) \cos(x)$ deswegen übersetzen wir

$$dy = 2 \sin(x) \cos(x) dx$$

Die Integrationsgrenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$ entsprechen $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$. Eine Stammfunktion für e^y ist e^y .

Da $2/3 > 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2/3} = +\infty$$

und folglich

$$\int_1^{+\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{x}} dx = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_1^t = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} t^{2/3} - \frac{3}{2} \right) = -\infty$$

Aufgabe A6: (10 Punkte)

(2P) Berechnen Sie den Wert der folgenden Funktion an der Stelle $(9, -1)$.

(2P) Berechnen Sie die Einschränkung der folgenden Funktion auf die Gerade $y = \frac{1}{2}x$.

(6P) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ der folgenden Funktion an der Stelle $(0,1)$:

$$f(x, y) = 2 \sin\left(xy^3 \frac{\pi}{4}\right) + e^{y^2}$$

Es gilt

$$f(9, -1) = 2 \sin(9(-1)^3 \frac{\pi}{4}) + e^{(-1)^2} = 2 \sin(-9 \frac{\pi}{4}) + e = e - \sqrt{2}$$

Mit $y = \frac{1}{2}x$ ist

$$x \mapsto g(x) = f(x, \frac{1}{2}x) = 2 \sin(x \frac{x^3 \pi}{8 \cdot 4}) + e^{\frac{x^2}{4}} = 2 \sin(\frac{x^4 \pi}{32}) + e^{\frac{x^2}{4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cos(xy^3 \frac{\pi}{4}) \cdot 3y^2 \cdot x \cdot \frac{\pi}{4} + e^{y^2} \cdot 2y = \cos(xy^3 \frac{\pi}{4}) \cdot y^2 \cdot x \cdot \frac{3\pi}{2} + 2y \cdot e^{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(xy^3 \frac{\pi}{4}) \cdot y^3 \frac{\pi}{4} \cdot y^2 \cdot x \cdot \frac{3\pi}{2} + \cos(xy^3 \frac{\pi}{4}) \cdot y^2 \cdot \frac{3\pi}{2} =$$

$$-\sin(xy^3 \frac{\pi}{4}) \cdot y^5 \cdot x \cdot \frac{3\pi^2}{8} + \cos(xy^3 \frac{\pi}{4}) \cdot y^2 \cdot \frac{3\pi}{2}$$

Mit $x = 0$ und $y = 1$ bekommen wir

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) = \frac{3\pi}{2}$$