Universität Regensburg
Naturwissenschaftliche
Fakultät I - Mathematik

H. Walter

23. Januar 1999

Mathematik für Biologen und Pharmazeuten

1. Klausur

1. Aufgabe (7 Punkte): Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl U der Umläufe pro Minute beim Schwänzeltanz der Bienen in Abhängigkeit von der Entfernung x der Nektarquelle.

x [km]	1	2	3	4	5
U	20	16	12,5	10	8

Prüfen Sie auf graphischem Weg, ob zwischen x und U ein exponentieller Zusammenhang $U = U_0 e^{kx}$ besteht.

Ermitteln Sie mit Hilfe der Zeichnung Näherungswerte für die Konstanten k und U_0.

Berechnen Sie, wieviele Umläufe pro Minute eine tanzende Biene voraussichtlich macht, wenn sie eine Nektarquelle in 600 m Entfernung entdeckt hat.

Wie lautet der funktionale Zusammenhang zwischen x und U bei Verwendung der Basis 10?

2. Aufgabe (5 Punkte): Berechnen Sie jeweils den Grenzwert für

a) die Folgen $\left\{\frac{n^2}{(n+1)^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ und ? $\left\{\frac{n^n}{(n+1)^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

b) die konvergente Reihe $\frac{10}{2} - \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} - \frac{10}{2^4} + \cdots$

3. Aufgabe (7 Punkte): Berechnen Sie folgende Grenzwerte von Funktionen:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{\cos(3x)}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - \sqrt{2x^2+1}}{2x - \sqrt{9x^2+x}}$ c) $\lim\limits_{x\searrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$

4. Aufgabe (6 Punkte): Der x-Wert, bei dem sich die Graphen der Funktionen f_1 mit $f_1(x) = 2^x - 1$ und f_2 mit $f_2(x) = 3\cos x$ im 1. Quadranten schneiden, werde mit a bezeichnet.

a) Berechnen Sie den Inhalt des (endlichen) Flächenstücks, das im 1. Quadranten von den beiden Funktionsgraphen und der y-Achse begrenzt wird, in Abhängigkeit von a.

b) Bestimmen Sie graphisch einen Näherungswert für a und verbessern Sie diesen durch einmalige Anwendung des Newton-Verfahrens (Ergebnis auf 3 Dezimalstellen runden).

Welcher Zahlenwert ergibt sich damit für den in a) berechneten Flächeninhalt?

5. Aufgabe (6 Punkte): Die Anzahl z der Fahrzeuge, die stündlich eine Straße passieren können, läßt sich aus der Maßzahl v der mittleren Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ und der Maßzahl ℓ der mittleren Fahrzeuglänge in m nach der folgenden empirischen Formel berechnen:

$$z = \frac{3600\,v}{\ell + \frac{1}{2}v + \frac{1}{6}v^2}\,; \quad v > 0$$

Ermitteln Sie für den Fall $\ell = \frac{25}{6}$, bei welcher Geschwindigkeit (gemessen in $\frac{km}{h}$) die Anzahl z ihren größten Wert (globales Maximum!) erreicht.

6. Aufgabe (7 Punkte): Ein Waldstück bestehe anfangs aus 10^6 Bäumen. In jedem Folgejahr mögen 11% des am jeweiligen Jahresbeginn vorhandenen Bestands absterben.

a) Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Anzahl der Bäume nach n Jahren ($n \in \mathbb{N}$).

Berechnen Sie, nach wievielen Jahren sich der Anfangsbestand halbiert hat.

Berechnen Sie die Zahl der Bäume nach 10 Jahren.

b) Man nehme nun vereinfacht an, daß (beginnend mit dem 1. Jahr) an jedem Jahresende 40.000 Bäume nachgepflanzt werden und die jährliche Waldsterbensrate auch für die nachgepflanzten Bäume bei 11% liegt.

Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Anzahl der nachgepflanzten Bäume, die nach n Jahren ($n \in \mathbb{N}$) vorhanden sind (Endergebnis <u>nicht</u> in Form einer Summe).

Berechnen Sie, wieviele Bäume nach 10 Jahren insgesamt vorhanden sind, wenn wie angegeben nachgepflanzt wird. Wieviel Prozent des ursprünglichen Bestands sind dies?