k

UNIVERSITÄT REGENSBURG
Naturwissenschaftliche
Fakultät I – Mathematik
Dr. Klaus Barbey

Wintersemester 1999/2000

Mathematik für Biologen und Pharmazeuten

1. Klausur
22. Januar 2000

1. Aufgabe (6 Punkte):

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

(3)

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+4}{n+1}-\frac{n^5+4}{n^3+n^2+5n}\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x$?

iv) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\tan \pi x}{x^2+x-12}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$ vi) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}}{3x+2}$

2. Aufgabe (5 Punkte):

a) Berechnen Sie die Partialsummen der folgenden unendlichen Reihen:

(2)

i) $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\cdots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\cdots$ ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ iii) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

Konvergieren die Reihen? Wenn ja, gegen welchen Wert?

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden unendlichen Reihen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(1)

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n n!}$? ii) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$

3. Aufgabe (6 Punkte):

Die Funktion $f\colon [0,\infty[\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-\frac{1}{x}) & \text{für alle } x>0\\ 0 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

a) i) Ist f stetig? ii) Ist f differenzierbar? Falls ja, wie lautet die Ableitung von f?

b) Zeigen Sie, daß f eine Umkehrfunktion besitzt. Bestimmen Sie diese, ihren Definitionsbereich und ihre Ableitung.

4. Aufgabe (5 Punkte):

a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion

i) $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ für alle $y>0,\ x\in\mathbb{R}$

ii) $f(x,y)=x^y$ für alle $x>0,\ y\in\mathbb{R}$

iii) $g(x,y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$

(4) iv) $h(x,y,z)=x^3z+\frac{1}{2}x^2y^2+y^3z$ für alle $x,y,z\in\mathbb{R}$

b) Rechnen Sie nach, daß die Funktion aus a) i) die Aussage des Satzes von Schwarz erfüllt.

bitte wenden

5

5. Aufgabe (4 Punkte):

Die Funktion $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) \qquad \text{für alle } x > -1.$$

i) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

ii) Bestimmen Sie die lineare Approximation für $f(x)$ im Punkt $x_0 = 0$.

iii) Bestimmen Sie die Extremwerte von f.

2 iv) Welches Krümmungsverhalten hat f?

6. Aufgabe (4 Punkte):

Beweisen Sie:

i) Die Gleichung

$$(x+1)\ln(x+1) = 3$$

hat genau eine reelle Lösung.

ii) Diese liegt im Intervall $[1, 2]$.

1 Führen Sie ausgehend von $x_0 = 2$ einen Schritt des Newton–Verfahrens zur Bestimmung der Lösung durch.

Hinweis: Antworten zählen nur, wenn sie (kurz) begründet sind. Ergebnisse zählen nur, wenn ein Rechengang erkennbar ist.

/30