Lösungen der 1. Klausur

1. Aufgabe

i) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3 \to e^{3}$ bei $n\to\infty$ (Vorlesung)

ii) $\frac{n^3+4}{n+1} - \frac{n^5+4}{n^3+n^2+5n} = \frac{n^6+n^5+5n^4+4n^3+4n^2+20n-n^6-4n-n^5-4}{(n+1)(n^3+n^2+5n)}$

$= \frac{5n^4+4n^3+4n^2+16n-4}{(n+1)(n^3+n^2+5n)} \to 5$ bei $n\to\infty$

iii) $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x = e^{x\ln\frac{x+1}{x+3}}$ und

$x\ln\frac{x+1}{x+3} = \frac{\ln(x+1)-\ln(x+3)}{\frac{1}{x}}$ l'Hosp: $\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}}{-\frac{1}{x^2}} = -x^2\,\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$= -\frac{2x^2}{(x+1)(x+3)} \to -2$ bei $x\to\infty$

also $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x \to e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ bei $x\to\infty$.

iv) $\frac{\tan\pi x}{x^2+x-12}$; l'Hosp: $\frac{\pi(1+\tan^2\pi x)}{2x+1} \to \frac{\pi}{7}$ bei $x\to 3$

v) $\frac{x-\arctan x}{x^3}$ l'Hosp: $\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+x^2} \to \frac{1}{3}$

vi) $\frac{\sqrt{x^2+5}}{3x+2} = \frac{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{3+\frac{2}{x}} \to \frac{1}{3}$

2. Aufgabe: a)

i) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3^2}{6^2} + \frac{2^2}{6^2} + \dots + \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n} =$

$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$

Reihe konvergiert gegen $\frac{3}{2}$

ii) $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{k-1} = (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{n}$

Reihe divergiert

iii) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

Reihe konvergiert gegen 1

b) i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{5}{2}} - 1$ Reihe konvergiert

als Exponentialreihe

ii) $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \dots$

Wegen $\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \to 1$ ist die Reihe divergent

3. Aufgabe:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) i) f stetig? f stetig auf $]0,\infty[$ als Zusammensetzung

f in 0 stetig? $\exp(-\frac{1}{x}) \to 0 = f(0)$ bei $x \downarrow 0$ oder $\frac{1}{x} \to \infty$.

also stetig!

ii) f differenzierbar? f differenzierbar auf $]0,\infty[$ als Zusammensetzung

f in 0 differenzierbar? $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\exp(-\frac{1}{x})}{x} = \frac{1}{x}\exp(-\frac{1}{x})$

$= \dfrac{t}{e^t} \to 0$ bei $x \downarrow 0$ oder $t = \frac{1}{x} \to \infty$.

Also in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$, also überhaupt differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

b) Nach a ii) ist $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$, also ist f streng monoton wachsend und besitzt somit eine Umkehrfunktion.

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ ist Bild $f = [0,1[$ = Def. bereich von f^{-1}

und $y = e^{-\frac{1}{x}}$ ergibt $-\frac{1}{x} = \ln y$ $\quad x = -\frac{1}{\ln y}$

somit $f^{-1}(y) = -\dfrac{1}{\ln y}$ für $0 < y < 1$, oder

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{\ln x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

4. Aufgabe:

a) i) $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$ für $x \in \mathbb{R}, y > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

ii) siehe unten

iii) $g(x,y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

iv) $h(x,y,z) = x^3 z + \frac{1}{2}x^2y^2 + y^3 z$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 z + xy^2 \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = x^2 y + 3y^2 z \quad \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = x^3 + y^3.$$

b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

gleich! also Satz von Schwarz!

ii) $f(x,y) = x^y$ für $x > 0, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x$$

5. Aufgabe: $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$ für $x > -1$

i) $(x+1)\ln(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x+1}}$ l'Hosp: $\frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = -(x+1) \to 0$ bei $x \to -1$

ii) Tangente in 0? $f'(x) = \ln(x+1) + 1$ $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$

$T(x) = x$ oder $(x+1)\ln(x+1) \approx x$ für $|x|$ klein

iii) $f'(x) = 0 = \ln(x+1) + 1$ $\ln(x+1) = -1$ $x+1 = \frac{1}{e}$

$x_0 = \frac{1}{e} - 1$ $f''(x) = \frac{1}{x+1}$ $f''(x_0) = e > 0$

also Minimum! $f(x_0) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$.

iv) $f''(x) = \frac{1}{x+1} > 0$ für alle $x > -1$, also ist f konvex.

6. Aufgabe: $(x+1)\ln(x+1) = 3$

Setze $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$ für alle $x > -1$

$f'(x) = \ln(x+1) + 1$

1) Für $-1 < x \leq 0$ ist $0 < x+1 \leq 1$ also $f(x) \leq 0$, keine Lösung möglich

2) Für $x > 0$ ist $f'(x) > 0$ also f dort streng monoton wachsend also höchstens eine Lösung für $x > 0$.

3) Für $x = 1$ ist $f(1) = 2\ln 2 < 2 < 3$ da $\ln 2 < \ln e < 1$

Für $x = 2$ ist $f(2) = 3\ln 3 > 3$ da $\ln 3 > \ln e > 1$

2)&3): Eine Lösung zwischen $[1,2]$ nach Zwischenwertsatz

Setze $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3$ $g'(x) = \ln(x+1) + 1$; $x_0 = 2$

Newton: $x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 2 - \frac{3\ln 3 - 3}{\ln 3 + 1} = 2 - 3\frac{\ln 3 - 1}{\ln 3 + 1} = 1.8590$