K

UNIVERSITÄT REGENSBURG
Naturwissenschaftliche
Fakultät I – Mathematik
Dr. Klaus Barbey

Wintersemester 1999/2000

Mathematik für Biologen und Pharmazeuten

2. Klausur

Aufgabengruppe B

26. Februar 2000

1. Aufgabe: (5 Punkte) Man berechne die folgenden Integrale:

i) $\int_1^8 \left(4\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx$ ii) $\int_0^1 \cosh x \, dx$ iii) $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^5} \, dx$

iv) $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$ v) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

(4)

2. Aufgabe: (5 Punkte) a) Man bestimme den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren:

i) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^6}$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ iii) $\int_0^1 \frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx.$

b) Bestimmen Sie, für welche $p > 0$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \left(\frac{x}{x^2+p} - \frac{p}{1+x}\right) dx$$

existiert und bestimmen Sie dann seinen Wert.

(2)

3. Aufgabe: (6 Punkte) a) Welche der folgenden Differentialformen ist ein totales Differential? (Begründung angeben)

i) $(x^3 - 3xy^2)\, dx + (y^3 - 3x^2y)\, dy$ ii) $(y - x^2)\, dx + (y^2 - x)\, dy$

(2)

b) Es bezeichne C die Kurve, die vom Punkt $(-1,1)$ entlang der Parabel $y = x^2$ zum Punkt $(2,4)$ läuft und von dort geradlinig zum Punkt $(-1,1)$ zurück.

i) Berechnen Sie

$$\int_C (y - x^2)\, dx + (y^2 - x)\, dy.$$

ii) Begründen Sie ohne Rechnung, daß

$$\int_C \cos x \sinh y \, dx + \sin x \cosh y \, dy = 0.$$

(1)

bitte wenden!

10

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $b > 0$.

i) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^b x^3\,dx$ näherungsweise mit der Trapezregel (4 Teilintervalle).

ii) Zeigen Sie, daß die Simpsonregel (2 Teilintervalle) den exakten Wert des Integrals $\int_0^b x^3\,dx$ liefert.

5. Aufgabe: (6 Punkte)

i) Bestimmen Sie die Lösung y der DG

$$y^2 y' = 1 - 2x$$

3

mit $y(0) = 3$.

ii) Wie lautet die Lösung y der DG

$$y - xy' = \frac{1}{2}(1 + x^2 y'),$$

welche $y(1) = 1$ erfüllt?

6. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so daß für eine Zahl $p > 0$ gilt

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = pf(x,y) \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Es sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fest. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$h: h(t) = f(tx, ty) \qquad\qquad \text{für alle } t > 0$$

die DG $h'(t) - \frac{p}{t}h(t) = 0$ erfüllt.

ii) Lösen Sie diese DG und schließen Sie daraus, daß f homogen vom Grade p ist.

Hinweis: Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe sowie die bearbeitete Aufgabengruppe (A oder B).

Antworten zählen nur, wenn sie begründet sind, Ergebnisse zählen nur, wenn ein Rechengang erkennbar ist.

Viel Erfolg!

14

8