

Mathematik für Biologen und Pharmazeuten

Nachklausur

1. Aufgabe (6 Punkte): a) Konvergieren die Folgen, die durch

$$\text{i) } a_n = \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2+1}{n} \qquad \text{ii) } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind? Wenn ja, wie lautet jeweils der Grenzwert?

b) Die folgenden Grenzwerte sind zu berechnen, falls sie existieren:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \quad (a > 0 \text{ fest}) \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sin x}{3x + \cos x}$$

c) Welchen Wert hat die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$?

d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$?

2. Aufgabe (5 Punkte): Gegeben ist die Funktion

$$f : f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 1 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f .
- Geben Sie mit Hilfe des Differentials eine Näherung für $f(0.01, 0.98)$ an.
- Bestimmen Sie Art und Lage der Extremwerte von f .

3. Aufgabe (4 Punkte): Es sei

$$f : f(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{x+4} \quad \text{für alle } -4 \leq x \leq 0.$$

Zeichnen Sie den Graphen von f und berechnen Sie die Fläche, die der Graph mit der x -Achse einschließt. Bei der Rotation dieser Fläche entsteht ein Stromlinienkörper, wie groß ist dessen Volumen?

bitte wenden

4. Aufgabe (6 Punkte): a) Man berechne die folgenden Integrale:

i) $\int_1^1 \frac{5x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}} dx$ ii) $\int_0^1 \frac{x^5}{1-x^6} dx$ iii) $\int_1^e x^\alpha \ln x dx$ für $\alpha > 0$ fest.

b) Man berechne die folgenden Integrale, sofern sie existieren:

i) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$ ii) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$

c) Man zeige

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \quad \text{für } a > 0 \text{ fest.}$$

5. Aufgabe (3 Punkte): Bestimmen Sie die Lösung y der DG

$$(9 - x^2) y' - xy = 0$$

welche der folgenden Bedingung genügt:

i) $y(0) = 3$ ii) $y(1) = 1$.

6. Aufgabe (6 Punkte): Geben Sie für die unten skizzierten drei Kurven C_1, C_2, C_3 jeweils eine Parameterdarstellung an und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C xy^2 dx + 2x^2y dy$$

für $C = C_1, C_2$ und C_3 .

