**Universität Regensburg**
Naturwissenschaftliche
Fakultät I - Mathematik
H. Walter

13. Januar 2001

# Mathematik für Biologen und Pharmazeuten

## 1. Klausur

**1. Aufgabe** (5 Punkte): Die folgende Zahlenreihe gibt die Ausbreitung einer Infektionskrankheit in einer Tierkolonie wieder. $N(t)$ sei dabei die Anzahl der zur Zeit $t$ (in Tagen) infizierten Tiere

| $t$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(t)$ | 3 | 7 | 20 | 54 | 135 | 300 | 541 | 662 | 900 | 962 |

Zeigen Sie graphisch, daß zwischen $t$ und $N(t)$ in einem längeren Zeitintervall ein Zusammenhang der Form $N(t) = be^{at}$ besteht.

Geben Sie dieses Zeitintervall an und ermitteln Sie die Werte der Konstanten $a$ und $b$ mit Hilfe der Zeichnung.

Berechnen Sie (unter Annahme dieses Zusammenhangs) die Anzahl der infizierten Tiere, die zur Zeit $t = 9$ (Tage) vorhanden waren.

**2. Aufgabe** (7 Punkte): a) Überprüfen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k - 2\cdot 9^k}{5\cdot 9^k}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz.

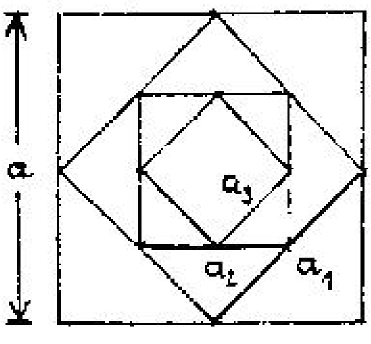
b) Untersuchen Sie, ob sich die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x},$$

stetig auf die Stelle $x_0 = 0$ fortsetzen läßt.

(Hinweis: $f(x)$ zunächst geeignet umformen!)

**3. Aufgabe** (6 Punkte):




In ein Quadrat mit der Seitenlänge $a$ wird durch Verbinden der Seitenmittelpunkte ein zweites Quadrat (Seitenlänge $a_1$) einbeschrieben. Auf die gleiche Weise beschreibt man in das zweite Quadrat ein drittes (Seitenlänge $a_2$) ein, und verfährt so weiter (siehe Skizze). Dabei entsteht eine unendliche Folge von einbeschriebenen Quadraten.

Berechnen Sie die Seitenlängen $a_1$, $a_2$, $a_3$ der ersten 3 einbeschriebenen Quadrate (in Abhängigkeit von $a$).

Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Seitenlänge $a_n (n \in \mathbb{N})$ des $n$-ten einbeschriebenen Quadrats an (in Abhängigkeit von $a$ und $n$).

Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte aller (auf diese Weise) einbeschriebenen Quadrate.

**4. Aufgabe** (4 Punkte): Bestimmen Sie graphisch einen Näherungswert für die kleinste <u>positive</u> Lösung der Gleichung $\tan x = x$.

Verbessern Sie diesen durch einmalige Anwendung des Newton-Verfahrens (Ergebnis auf 4 Dezimalstellen runden).

**5. Aufgabe** (7 Punkte): Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sinh x}{x - \sin x} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 1} \left[\frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1}\right] \qquad \text{c)} \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(\frac{1}{x^2}) - 1}{2\arctan(x^2) - \pi}$$

**6. Aufgabe** (5 Punkte): Im Abstand $x$ vom Mittelpunkt einer stromdurchflossenen Spule (Spulenradius $a > 0$) befindet sich auf der Spulenachse ein kleiner Magnet. Der Betrag der auf diesen Magneten ausgeübten Kraft ist dann proportional zu

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad (x \geq 0).$$

Berechnen Sie für welchen Abstand $x_0$ die Kraft am größten ist (globales Maximum!).

**7. Aufgabe** (4 Punkte): Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

$$\ln(1+a) < a \quad \text{für alle} \quad a > 0$$

(Hinweis: Man betrachte die Funktion

$$f\colon [1, 1+a] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x.)$$