Universität Regensburg
Naturwissenschaftliche
Fakultät I – Mathematik
Dr. Klaus Barbey

Wintersemester 2001/2002

Mathematik für Biologen

1. Klausur

1. Aufgabe (6 Punkte): Es sind die Folgen

$$\text{i) } a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad \text{ii) } b_n = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n}) \qquad \text{iii) } c_n = \frac{n!}{n^n}$$

gegeben.

a) Konvergieren diese Folgen? Wenn ja, wie lautet ihr Grenzwert?

b) Konvergieren die unendlichen Reihen

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad\qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ ?$$

Wenn ja, wie lautet der Reihenwert?

c) Konvergiert die Folge $\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)_{n=1,2,\ldots}$? Wie lautet der Grenzwert?

2. Aufgabe (4 Punkte): a) Entscheiden Sie, ob die folgenden unendlichen Reihen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{(2^n)^3} \qquad \text{ii) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{10+6\cdot 9^k}{11^k} \qquad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$? Wie lautet dann der Wert der Reihe?

3. Aufgabe (7 Punkte): a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\text{i) } \lim_{x\to 0} x^x \qquad \text{ii) } \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \qquad \text{iii) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 5\sin x}{10x + 3\cos x}$$

$$\text{iv) } \lim_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} \quad (p, q \in \mathbb{N}) \qquad \text{v) } \lim_{x\to 11} \frac{2 - \sqrt{x-7}}{x^2 - 121}.$$

b) Wirft man einen Körper mit Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben, so gilt bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes (Reibungskonstante k) für die Steighöhe h

$$h = \frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{k v_0}{g}\right)$$

Welche Steighöhe ergibt sich ohne Berücksichtigung der Reibung, das heißt, bei $k \to 0$?

bitte wenden!

4. Aufgabe (5 Punkte): Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x) = \ln\sqrt{2x-1}\,.$$

y	x
-1.15	$(\max x - \frac{1}{2})$
0	0
0.5	1
0.9	2
1.15	5

i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$ an.

ii) Zeigen Sie, daß f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt.

iii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion und ihre Ableitung.

iv) Skizzieren Sie die Graphen von f und f^{-1}.

v) Wie lautet die lineare Approximation von f im Punkt $x_0 = 0$?

5. Aufgabe (4 Punkte): Es seien $0 \leqq a < b$ und $p, q \in \mathbb{N}$ fest. Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion

$$f : f(x) = (x-a)^p (b-x)^q \qquad \text{für alle } x \in [a,b]\,.$$

6. Aufgabe (4 Punkte): Die Funktion $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ sei differenzierbar mit $f(0) = 0$. Die Funktion $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{falls } -1 < x < 1,\ x \neq 0, \\ f'(0) & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie

i) g ist stetig.

ii) Existiert $f''(0)$, so ist g differenzierbar. Bestimmen Sie dann die Ableitung von g.

15 - 20 / 30

50 - 66 %

Hinweis: Antworten zählen nur, wenn sie begründet sind. Ergebnisse zählen nur, wenn ein Rechengang erkennbar ist.

Viel Erfolg!