1. Klausur

1. Aufgabe (6 Punkte)

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad b_n = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) \cdot \ldots \cdot (1-\frac{1}{n})$ $\qquad c_n = \frac{n!}{n^n}$

a) i) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0$

ii) $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) \cdot \ldots \cdot (1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

iii) $\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$, also $\longrightarrow 0$

b) i) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$

Reihe ist divergent

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe, divergent nach Vorlesung

c) $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e}$

2. Aufgabe (4 Punkte)

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{(2^n)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{8}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{7}{8}} = \frac{8}{15}$ als geometrische Reihe zu $-\frac{7}{8}$, $|\ | < 1$

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10 + 6 \cdot 9^k}{11^k}$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10}{11^k} = 10 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{11}\right)^k = 10 \frac{1}{1-\frac{1}{11}} = 11$, geom. Reihe!

$\sum_{k=0}^{\infty} 6 \frac{9^k}{11^k} = 6 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{11}\right)^k = 6 \frac{1}{1-\frac{9}{11}} = 33$ geom. Reihe!

somit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10 + 6 \cdot 9^k}{11^k}$ konvergent als Summe konv. Reihen und $= \underline{\underline{44}}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{1}{n}$ ist divergent, da Glieder $\longrightarrow \cosh 0 = 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^x)^n$ ist geometrische Reihe, also genau dann

konvergent, wenn $0 < e^x < 1$, also genau wenn $x < 0$; und dann

ist $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} = e^x \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} = \frac{e^x}{1-e^x}$

<u>3. Aufgabe</u> (7 Punkte) a) Berechnen Sie die Grenzwerte:

i) $\lim_{x\to 0} x^x$: $\quad x^x = e^{x \ln x} \qquad x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ l'Hosp anwendbar

und liefert: $\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0$; also $x^x \to e^0 = \underline{\underline{1}}$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$; l'Hosp: $\frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{1+x^2} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+x^2} \to \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x - 5\sin x}{10x + 3\cos x} \qquad \frac{2x - 5\sin x}{10x + 3\cos x} = \frac{2 - 5\frac{\sin x}{x}}{10 + 3\frac{\cos x}{x}} \to \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$

l'Hosp ist nicht anwendbar!

iv) $\lim_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$; l'Hosp: $\frac{p x^{p-1}}{q x^{q-1}} \to \underline{\underline{\frac{p}{q}}}$

v) $\lim_{x\to 11} \frac{2 - \sqrt{x-7}}{x^2 - 121}$; l'Hosp: $\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-7}}}{2x} \to \underline{\underline{-\frac{1}{88}}}$

b) $h = \frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{k v_0}{g}\right) = \frac{v_0 k - g \ln\left(1 + \frac{k v_0}{g}\right)}{k^2}$ l'Hosp

$$\frac{v_0 - g \frac{1}{1 + \frac{k v_0}{g}} \frac{v_0}{g}}{2k} = \underline{\underline{\frac{v_0^2}{2g}}}$$

4. Aufgabe: $f: f(x) = \ln\sqrt{2x+1} = \frac{1}{2}\ln(2x+1)$

i) Def. bereich $2x+1>0 \quad x>-\frac{1}{2} \qquad D = \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[$

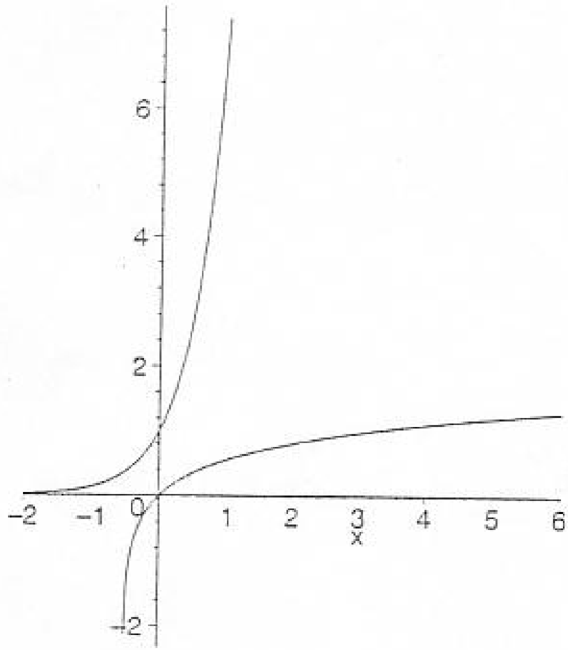
ii) $f'(x) = \frac{1}{2x+1} > 0$ für alle $x \in D$, also f streng monoton wachsend

iii) $y = \frac{1}{2}\ln(2x+1)$ nach x auflösen. $2y = \ln(2x+1) \quad 2x+1 = e^{2y}$

$x = \frac{1}{2}(e^{2y}-1)$, also Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^{2x}-1)$

$(f^{-1})'(x) = e^{2x}$ oder $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = 2x+1 = e^{2y}$

iv)



v) Tangente in $x_0 = 0$ ist

$T(x) = f(0) + f'(0)x = x.$

5. Aufgabe: $0 \leq a < b$; $p, q \in \mathbb{N}$ fest,

$$f(x) = (x-a)^p (b-x)^q \qquad \text{für } x \in [a,b]$$

i) Es ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(a) = f(b) = 0$
also Minimum in $x = a$ und $x = b$.

ii) $f'(x) = p(x-a)^{p-1}(b-x)^q - (x-a)^p q (b-x)^{q-1} =$

$$= (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}\left(p(b-x) - q(x-a)\right) \overset{!}{=} 0 \quad \text{für } a < x < b$$

$$-px - qx = pb + qa \qquad x = \frac{pb+qa}{p+q} = \frac{q}{p+q}a + \frac{p}{p+q}b =: x_0$$

$f'(x) = (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}\left(pb + qa - (p+q)x\right)$ Vorz.wechsel $+ \to -$

also Maximum! $f(x_0) = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q (b-a)^{p+q}$

6. Aufgabe: (4 Punkte): $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$.

Sei $g:]-1,1[\to \mathbb{R}$: $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$

i) g ist stetig: stetig für $x \neq 0$ als Quotient stetiger Funktionen!
stetig in 0: $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to f'(0)$ bei $x \to 0$ d.h. $g(x) \to g(0)$!

ii) Es existiere $f''(0)$. Dann ist g differenzierbar.

g differenzierbar in $x \neq 0$ als Quotient differenzierbarer Funktionen.

differenzierbar in 0: $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} = \frac{f(x) - x f'(0)}{x^2}$

l'Hosp anwendbar: $\frac{f'(x) - f'(0)}{2x} \to \frac{1}{2} f''(0)$ und

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} f''(0) & x = 0 \end{cases}$$