

Mathematik für Biologen

2. Klausur

1. Aufgabe (4 Punkte): Es sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ und die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \quad \text{für alle } (x, y) \in D.$$

i) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung und das totale Differential von f .

ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Differentials näherungsweise $\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[3]{0.975}$.

2. Aufgabe (6 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\int_0^\pi \sin x \, dx$

ii) $\int_{-1}^1 \cosh u \, du$

iii) $\int_0^1 \frac{5\sqrt{x} + 7x}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

iv) $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$

v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

vi) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx$

3. Aufgabe (5 Punkte): Entscheiden Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

i) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x \, dx$

iii) $\int_0^\infty (\cosh x - \sinh x) \, dx$

iv) $\int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx$

4. Aufgabe (4 Punkte): Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 2^x \, dx$$

i) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

ii) direkt aus der Definition, also als Grenzwert von Zerlegungssummen. Verwenden Sie äquidistante Zerlegungen.

bitte wenden!

5. Aufgabe (4 Punkte): Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f: f(x) = -x\sqrt{x+3} \quad \text{für } x \geq -3.$$

Das Flächenstück, das von der x -Achse und dem Graphen von f eingeschlossen wird, rotiert um die x -Achse; dadurch entsteht ein Rotationskörper.

Berechnen Sie dessen Volumen und die Fläche seines Längsschnittes.

6. Aufgabe (7 Punkte): a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Differentialformen jeweils totale Differentiale sind und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion.

i) $\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$ auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

ii) $x^2y^2 dx + x^3y dy$

iii) $(x^2y + 2xy^2) dx + (\frac{1}{3}x^3 + 2x^2y + 4y^3) dy$

b) Es bezeichne C die Kurve in der Ebene, die von dem Punkt $(3, 3)$ längs dem Graphen der Funktion $f: f(x) = \frac{9}{x}$ zu dem Punkt $(9, 1)$ verläuft und von dort geradlinig zu dem Punkt $(3, 3)$ zurück.

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C (2x + 1) dx + 2xy dy.$$

Hinweis: Antworten zählen nur, wenn sie begründet sind. Ergebnisse zählen nur, wenn ein Rechengang erkennbar ist.

Viel Erfolg!