Universität Regensburg
Naturwissenschaftliche
Fakultät I - Mathematik
H. Walter

11. Januar 2003

Mathematik für Biologen

1. Klausur

1. Aufgabe (10 Punkte): Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2-x}{2x^2-2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x(e^x-1)}$ d) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\cos x}$

2. Aufgabe (6 Punkte): a) Gegeben sei die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k=\frac{2-k}{\sqrt{4k^2-1}}$.

Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert oder divergiert.

b) Gegeben sei die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $b_k=\frac{1}{4k^2-1}$.

Zeigen Sie, dass sich b_k in der Form $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$ schreiben läßt.

Ermitteln Sie hiermit einen Ausdruck für die n-te Partialsumme s_n von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ und berechnen Sie hieraus den Grenzwert der Reihe (sofern dieser existiert).

3. Aufgabe (5 Punkte): Bestimmen Sie graphisch einen Näherungswert für die dem Betrag nach kleinste Lösung der Gleichung

$$\tan x = e^x - 2.$$

Verbessern Sie diesen durch einmalige Anwendung des Newton-Verfahrens (Ergebnis auf 4 Dezimalstellen runden).

4. Aufgabe (7 Punkte): Ein oben offener Wasserbehälter soll die Form eines aufrechtstehenden Zylinders haben und 8 m^3 Wasser fassen.

Ermitteln Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, wie groß der Durchmesser und die Höhe des Zylinders zu wählen sind, damit zur Herstellung des Behälters möglichst wenig Blech verbraucht wird (Globales Minimum!).

(Verwenden Sie in der zu minimierenden Funktion den Zylinderradius r als unabhängige Variable.)

5. Aufgabe (9 Punkte): a) Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot (3 - x) \quad ; \quad x \geq 0.$$

a) Untersuchen Sie f auf Extrema und Wendepunkte.

Zeichnen Sie den Graph von f im Bereich $0 \leq x \leq 5$.

b) (Vorbemerkung: Bei Drehung einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper vom Volumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx. \qquad)$$

Nun möge der Graph der gegebenen Funktion f im Intervall zwischen ihren beiden Nullstellen um die x-Achse rotieren.

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

6. Aufgabe (3 Punkte): Zeigen Sie unter Verwendung des Mittelwertsatzes:

$$\arctan x < x \quad \text{für alle} \quad x > 0$$