

Mathematik für Biologen

2. Klausur

(Integrale sind ohne Verwendung von Integraltabellen zu berechnen und DGLn ohne Verwendung allgemeiner Lösungsformeln zu lösen.)

1. Aufgabe (7 Punkte): Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{a) } \int_0^{\pi} x \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}x^2\right) dx \qquad \text{b) } \int \frac{11x - 16}{x^2 - 2x - 8} dx$$

2. Aufgabe (8 Punkte): a) Ermitteln Sie, für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} e^{-\lambda t} dt$ existiert bzw. nicht existiert.

Bestimmen Sie im Fall der Existenz den Wert des Integrals (in Abhängigkeit von λ).

b) Für ein Gas gelte die Zustandsgleichung:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = R \cdot T ; V > b$$

(p Druck, V Molvolumen, T Temperatur des Gases; R, a, b positive Konstanten)

Das Gas möge nun in einem isothermen Prozess (d.h. bei konstantem T) sein Volumen von V_1 nach V_2 verändern.

Berechnen Sie die dabei verrichtete äußere Arbeit $W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$.

3. Aufgabe (8 Punkte): Untersuchen Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy$$

auf lokale Maxima und Minima, sowie auf Sattelpunkte.

4. Aufgabe (5 Punkte): Für die Brennweite f einer einfachen, bikonvexen Linse gilt $f = \frac{ab}{a+b}$, wobei a die Gegenstandsweite, b die Bildweite ist.

a) Berechnen Sie das totale Differential von $f(a, b)$.

b) Aus einer Messung ergibt sich $a = 42,4 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$ und $b = 26,6 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$.

Berechnen Sie die Brennweite f und (unter Verwendung von a)) eine Näherung für den zugehörigen maximalen Fehler $|\Delta f|$.

(Ergebnisse jeweils auf 2 Dezimalstellen runden!)

5. Aufgabe (10 Punkte): Die Kurve k läuft entlang dem Graph von $y = x^2 - 1$ vom Punkt $(-1; 0)$ zum Punkt $(2; 3)$.

a) Berechnen Sie $\int_k \omega$ für die Differentialform

$$\omega = 2x dx + (x^2 + y) dy, U = \mathbb{R}^2.$$

b) Nun sei die Differentialform

$$\omega^* = e^y \cdot \omega = 2xe^y dx + (x^2 + y) e^y dy, U = \mathbb{R}^2,$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass ω^* total ist, und berechnen Sie die Stammfunktionen von ω^* .

Bestimmen Sie $\int_k \omega^*$.

6. Aufgabe (8 Punkte): Berechnen Sie die Lösung der folgenden DGL zur angegebenen Anfangsbedingung:

$$y' + y \sin x = 2 \sin x; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

x^2

$x^2 - 1$