Universität Regensburg
Naturwissenschaftliche
Fakultät I – Mathematik
Dr. Klaus Barbey

Wintersemester 2003/2004

Mathematik für Biologen

1. Klausur

1. Aufgabe: (7 Punkte): a) Eine experimentelle Überprüfung des adiabatischen Gasgesetzes

$$pV^{\kappa} = \text{konstant}$$

ergab die Meßreihe

V [ℓ]	22.4	5	3	2
p [at]	1	12.5	28.5	56.1

Führen Sie eine geeignete logarithmische Transformation durch und bestimmen Sie die Konstante κ

i) auf graphischem Wege,

ii) rechnerisch aus dem ersten und dem letzten Wertepaar.

b) Eine Bakterienkultur wächst exponentiell gemäß dem Wachstumsgesetz

$$N(t) = N_0 e^{kt},$$

dabei ist $N(t)$ die Anzahl der Bakterien zur Zeit t (in Stunden). Anfangs besteht die Kultur aus 900 Bakterien, sie wächst stündlich um 15%.

i) Welche Werte haben die Konstanten N_0 und k?

ii) Wieviele Bakterien enthält die Kultur nach $3\frac{1}{2}$ Stunden?

iii) In welcher Zeit verdoppelt sich die Kultur?

2. Aufgabe: (6 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh 3x}{2x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{3x-5}\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan ax - \arctan bx}{x}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x\right)^{\frac{2}{x}}$ v) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{2-\sqrt{x-5}}{x^2-81}$ vi) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln \dfrac{x+4}{x-4}$.

3. Aufgabe: (5 Punkte): a) Entscheiden Sie, ob die folgenden unendlichen Reihen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe:

i) $23 - \dfrac{23}{2} + \dfrac{23}{4} + \dfrac{23}{8} + \cdots$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+1}$

iii) $\sqrt{\dfrac{1}{9}} - \sqrt{\dfrac{2}{19}} - \sqrt{\dfrac{3}{29}} - \cdots \pm \sqrt{\dfrac{n}{10n-1}} \mp \cdots$ iv) $\dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \cdots$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + - \cdots ?$$

Welchen Wert hat dann die Reihe?

bitte wenden!

4. Aufgabe: (4 Punkte): Begründen Sie, daß die Funktion

$$f : f(x) = x^5 + x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

eine Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ besitzt und bestimmen Sie $g'(0)$. Wie lautet die lineare Approximation (Lineasierung) von f im Punkt 0? Besitzt auch die Funktion

$$f : f(x) = x^6 + x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

eine Umkehrfunktion?

5. Aufgabe: (4 Punkte): Es ist die Gleichung

$$x^3 + x - 11 = 0$$

gegeben.

i) Beweisen Sie: Die Gleichung besitzt eine reelle Lösung, die zwischen 2 und 3 liegt.

ii) Führen Sie, ausgehend von dem Startwert $x_0 = 2$, einen Schritt des Newton-Verfahrens aus. (Rechengenauigkeit 4 Stellen hinter dem Komma)

iii) Beweisen Sie: Die Gleichung hat keine weitere reelle Lösung.

6. Aufgabe: (4 Punkte): Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion

$$f : f(x) = x^2 \ln x \qquad \text{für alle } x > 0.$$

Geben Sie die Intervalle an, auf denen f konvex beziehungsweise konkav ist. Bestimmen Sie die Tangente im Punkt $(1, f(1))$.

Hinweise:

i) Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe.

ii) Antworten zählen nur, wenn sie (kurz) begründet sind. Ergebnisse zählen nur, wenn ein Rechengang erkennbar ist.

Viel Erfolg!