



Mathematik für Biologen

1. Klausur

Lösen Sie jede der Aufgaben 1 bis 5 auf einem gesonderten Blatt!

Schreiben Sie auf jedes Blatt Namen und Gruppe, sowie die Aufgabennummer!

- ✓ 1. Aufgabe (7 Punkte): Bei einer adiabatischen Zustandsänderung eines idealen Gases besteht zwischen Druck p und Volumen V des Gases der Zusammenhang $p \cdot V^\kappa = c = \text{konstant}$. Bei einem Experiment ergab sich für ein Edelgas die folgende Messreihe:

p [bar]	1,0	3,8	12,0	28,5	56,0
V [l]	22,4	10,0	5,0	3,0	2,0

Handwritten notes above the table: p 0 1,3350 2,485 3,349 4,025
Handwritten notes below the table: 3,109 2,303 1,609 1,079 0,673

- ✓ a) Berechnen Sie den Adiabatenexponent κ aus zwei dieser Wertepaare.
 ✓ b) Führen Sie eine geeignete logarithmische Transformation durch und ermitteln Sie κ auf graphischem Weg.

2. Aufgabe (7 Punkte): Der x -Wert, bei dem sich die Graphen der Funktionen g mit $g(x) = 2 - \frac{2}{3}x$ und h mit $h(x) = e^x$ schneiden, werde mit a bezeichnet.

- ✓ a) Bestimmen Sie graphisch einen Näherungswert für a und verbessern Sie diesen durch einmalige Anwendung des Newton-Verfahrens. (Ergebnis auf 3 Dezimalstellen runden)
 ✓ b) Im I. Quadranten gibt es ein (endliches) Flächenstück, das von **beiden** Koordinatenachsen und den beiden Funktionsgraphen begrenzt wird.
 Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks zunächst in Abhängigkeit von a und anschließend den zugehörigen Zahlenwert (auf 3 Dezimalstellen runden).

- ✓ 3. Aufgabe (7 Punkte): a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert für die Folgen

$$\left\{ \frac{n^2}{(n+1)^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{n^n}{(n+1)^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

- ✓ b) Überprüfen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k + 1}{10^{k+1}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz.

c) Gegeben sei eine (unendliche) Folge von Kugeln mit den Radien $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Berechnen Sie die Summe der Volumina all dieser Kugeln (sofern diese einen endlichen Wert besitzt).

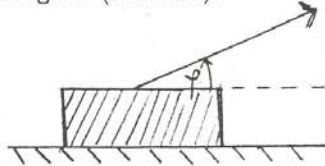
4. Aufgabe (6 Punkte): Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

√ a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x \cos x}{-2x^2 + 3 \sin x}$

√ c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{x-1}}$

5. Aufgabe (9 Punkte):



Ein Körper mit dem Gewicht $G (> 0)$ liegt auf einer horizontalen Unterlage. Durch eine unter dem Winkel φ schräg nach oben ziehende Kraft F wird der Körper so weggezogen, dass er gerade gleitet. Es gilt dann:

$$F(\varphi) = \frac{\mu G}{\cos \varphi + \mu \sin \varphi}; \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

(μ ist hierbei eine positive Konstante, die sog. Gleitreibungszahl.)

a) Berechnen Sie (in Abhängigkeit von μ) den Winkel φ_0 , für den $F(\varphi)$ minimal ist. (Nachweis, dass bei φ_0 wirklich ein globales Minimum vorliegt, nicht vergessen!)

b) Nun sei $\mu = 0,20$. Berechnen Sie für diesen Fall den Winkel φ_0 und außerdem, um wieviel Prozent die minimale Zugkraft kleiner ist als die Kraft bei waagrechtem Ziehen.