

Mathematik für Biologen

Klausur

Bitte beachten Sie unbedingt die Anleitung am Ende der Klausur!

1. Aufgabe (7 Punkte): a) Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\text{i) } a_n = \frac{24n^5 + 13n^2 - 4}{6n^5 + 3n^3 + 2n} \quad \text{ii) } a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden unendlichen Reihen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Reihenwert:

$$\text{i) } 1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3} + \dots \quad (u > 1) \quad \text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^k}{7^{k+1}} \quad \text{iii) } \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}}$$

c) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad a, b > 0.$$

2. Aufgabe (5 Punkte) Die Funktion $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

- Ist f stetig? Ist f differenzierbar?
- Bestimmen Sie Art und Lage der Extremwerte von f .
- Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen von f im Punkt $x_0 = e$.

3. Aufgabe (3 Punkte) Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$x^5 + x - 33 = 0$$

eine reelle Lösung zwischen 0 und 2 hat. Bestimmen Sie diese näherungsweise, indem Sie – ausgehend von einem geeigneten Startwert x_0 – einen Schritt des Newton-Verfahrens ausführen. (Rechengenauigkeit: 3 Nachkommastellen!) Beweisen Sie, daß es keine weiteren Lösungen geben kann.

4. Aufgabe (7 Punkte) a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{i) } \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx \quad \text{ii) } \int_0^1 (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x) dx \quad \text{iii) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \quad \text{iv) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

b) Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren:

$$\text{i) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx \quad \text{ii) } \int_0^8 \frac{8x^2 - 5x + 2}{\sqrt[3]{x}} dx$$

bitte wenden!

5. Aufgabe (4 Punkte) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung und das Differential der Funktion

$$f : f(x, y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} + xy \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

Schätzen Sie mit dem Differential den Funktionswert $f(8.03, 0.96)$.

6. Aufgabe (4 Punkte) a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Differentialformen totale Differentiale sind und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion:

$$\text{i) } (x + e^{xy}) dx + (e^{xy} - y) dy \quad \text{ii) } (2x \sinh y + y^4) dx + (x^2 \cosh y + 4xy^3) dy$$

b) Es bezeichne C den Kreis um $(0, 0)$ vom Radius 3. Welchen Wert hat das Kurvenintegral

$$\oint_C (-y + 3) dx + (x - 4) dy?$$

Anleitung: Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt! Für die erste Aufgabe ist der Mantelbogen vorgesehen, falls Sie die erste Aufgabe nicht bearbeiten, bleibt der Mantelbogen leer.

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Nummer Ihrer Übungsgruppe.

Legen Sie am Ende der Klausur alle Blätter, die Sie abgeben, in den Mantelbogen als Umschlag.

Antworten zählen nur, wenn sie begründet sind. Ergebnisse zählen nur, wenn ein Rechengang erkennbar ist.

Viel Erfolg!