Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Dr. Klaus Barbey

Wintersemester 2011/2012

Mathematik für Biologen

Klausur

Bitte beachten Sie unbedingt die Anleitung am Ende der Klausur!

1. Aufgabe: (7 Punkte) a) Eine Tierkolonie besteht am Anfang ($t = 0$) aus 4421 Individuen, sie wächst exponentiell nach dem Wachstumgesetz

$$n(t) = n_0 e^{\alpha t},$$

dabei bezeichnet $n(t)$ die Anzahl der Individuen zur Zeit t (in Jahren). Die Population wächst jährlich um 16%.

i) Welche Werte haben die Konstanten n_0 und α?
ii) Wieviel Individuen enthält die Kolonie nach 5.5 Jahren?
iii) In welcher Zeit verdoppelt sich die Population?

b) Zwischen zwei Größen $p > 0$ und $q > 0$ wird ein Zusammenhang der Form

$$q = Cp^a$$

mit Konstanten C und a vermutet. Eine experimentelle Überprüfung ergibt die Meßreihe

p	2.12	4.48	7.39	15.64
q	7.38	9.49	13.47	20.08

Prüfen Sie nach, ob nach einer geeigneten logarithmische Transformation die Meßwerte (ungefähr) auf einer Geraden liegen und bestimmen Sie die Konstanten C und a

i) auf graphischem Wege (Längeneinheit: 4cm).
ii) rechnerisch aus dem ersten und letzten Wertepaar.

2. Aufgabe: (6 Punkte) a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$\text{i)}\ \frac{18n^3 - 2n - 17}{6n^3 + 5n^2 + 1} \qquad \text{ii)}\ \frac{n^2+4}{n+3} - \frac{n^3+2}{n^2+5}.$$

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden unendlichen Reihen konvergieren (Begründung!) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Reihenwert:

$$\text{i)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{3^n} \qquad \text{ii)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right).$$

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen, wie lautet dann der Reihenwert?

$$\text{i)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n \qquad \text{ii)}\ 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \cdots$$

bitte wenden!

3. Aufgabe: (5 Punkte) a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion

$$f : f(x,y) \;=\; \sin x \cosh y \qquad\qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extremwerte der Funktion

$$f : f(x,y) \;=\; 2x^2 \;-\; \frac{1}{4}x^4 \;+\; y^2 \qquad\qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

4. Aufgabe: (6 Punkte) a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{i)} \int\limits_0^1 \left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) dx \qquad \text{ii)} \int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x}\, dx \qquad \text{iii)} \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

b) Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

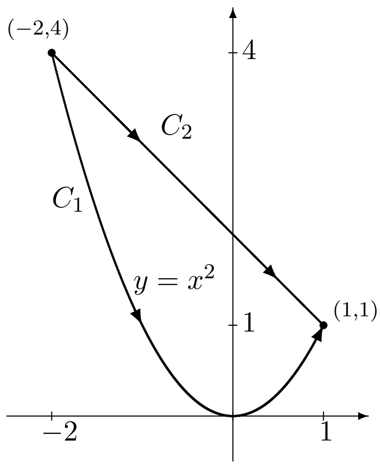
$$\text{i)} \int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) dx \qquad \text{ii)} \int\limits_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{iii)} \int\limits_1^\infty x e^{-x}\, dx$$

5. Aufgabe: (6 Punkte) Berechnen Sie für die Differentialformen

i) $6y\,dx + 5xy\,dy$

ii) $3x^2y\,dx + (x^3 + 2y)\,dy$

und die rechts skizzierten Kurven C_1 und C_2 jeweils das Kurvenintegral.



Anleitung: Bitte bearbeiten Sie **jede Aufgabe auf einem separaten Blatt!** Für die erste Aufgabe ist der Mantelbogen vorgesehen, falls Sie die erste Aufgabe nicht bearbeiten, bleibt der Mantelbogen leer.

Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Nummer Ihrer Übungsgruppe.

Legen Sie am Ende der Klausur alle Blätter, die Sie abgeben, in den Mantelbogen als Umschlag.

Antworten zählen nur, wenn sie begründet sind. Ergebnisse zählen nur, wenn ein Rechengang erkennbar ist.

Viel Erfolg!