UNIVERSITÄT REGENSBURG
Naturwissenschaftliche
Fakultät I – Mathematik
Dr. Klaus Barbey

Wintersemester 2009/2010

Mathematik für Biologen

Lösungen der Klausur

1. Aufgabe : a)

$$\text{i) } a_n = \frac{24n^5 + 13n^2 - 4}{6n^5 + 3n^3 + 2n} = \frac{24 + \frac{13}{n^3} - \frac{4}{n^5}}{6 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}} \to 4 \qquad \text{bei } n \to \infty$$

$$\text{ii) } a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n} \to 2 \qquad \text{bei } n \to \infty \qquad \text{da} \quad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$$

b)

$$\text{i) } 1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3} + - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{u}\Big)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{u}} = \frac{u}{1+u}$$

geometrische Reihe zu $\left|-\frac{1}{u}\right| = \frac{1}{u} < 1$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^k}{7^{k+1}} = \frac{2}{7} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{7^k} = \frac{2}{7}\frac{5}{7} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{7^k} = \frac{5}{7} \qquad \text{geometrische Reihe}$$

$$\text{iii) } \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}} \quad \text{divergent, da Glieder keine Nullfolge: } e^{-\frac{1}{n}} \to 1 \text{ bei } n \to \infty$$

c) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{i) } \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x} \qquad \text{l'Hosp. Regel: } \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{1} \to 0 \quad \text{bei } x \to 0$$

$$\text{ii) } \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \qquad \text{l'Hosp. Regel: } \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} \to 1 \quad \text{bei } x \to 0$$

2. Aufgabe Die Funktion $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

i) f ist stetig. Denn f ist für $x > 0$ stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen. Ist f stetig in 0? Zu zeigen ist $f(x) \to f(0) = 0$ bei $x \to 0$:

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \text{l'Hosp. Regel: } \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0 \quad \text{bei } x \to 0\,.$$

f ist für $x > 0$ differenzierbar als Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen. Ist f differenzierbar in 0? Betrachte

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x}{x} = \ln x \quad \text{divergent bei } x \to 0\,.$$

f ist in 0 nicht differenzierbar.

ii) Da $f(x) < 0$ für $0 < x < 1$ und $f(0) = 0$ liegt bei 0 ein (Rand–)Maximum vor. Betrachte nun f auf $]0,\infty[$; dort ist f differenzierbar mit $f'(x) = \ln x + 1$. Die Ableitung ist $= 0$ für $x_0 = \frac{1}{e}$, wegen $f''(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{e} > 0$ liegt dort ein Minimum vor mit $f(x_0) = -\frac{1}{e}$.

iii) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $x_0 = e$ ist allgemein gegeben durch

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{hier also } T(x) = e + 2(x - e) = 2x - e\,.$$

3. Aufgabe (3 Punkte) Betrachte die stetige (!) Funktion

$$f : f(x) \;=\; x^5 + x - \;33 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Wegen $f(0) = -33 < 0$ und $f(2) = 1 > 0$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle zwischen 0 und 2. Da diese offenbar nahe bei $x_0 = 2$ liegt, wählen wir $x_0 = 2$ als Startwert für das Newton–Verfahren:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{81} = \frac{161}{81} = 1.987654$$

Wegen $f'(x) = 5x^4 + 1 \;>\; 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f streng monoton wachsend, also gibt es nur eine Nullstelle von f.

4. Aufgabe (7 Punkte) a)

i) $\displaystyle\int_1^4 \Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \Big[-\frac{1}{x} - \ln x\Big]_1^4 = \frac{3}{4} - \ln 4$

ii) $\displaystyle\int_0^1 (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)\,dx = \int_0^1 (1 - x^{\frac{3}{2}})\,dx = \Big[x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big]_0^1 = \frac{3}{5}$

iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{16}$ durch Substitution $x = \cos\vartheta$

iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \frac{\pi}{4} + \Big[\ln\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\,.$

partielle Integration und bei $\tan x$ steht im Zähler die Ableitung des Nenners (bis auf -1)

b)

i) $\displaystyle\int_1^c \frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{x})\,dx = -\int_1^{\frac{1}{c}} e^{-u}\,du = \int_{\frac{1}{c}}^1 e^{-u}\,du = \Big[-e^{-u}\Big]^1 e^{-u} = -\frac{1}{e} + e^{-\frac{1}{c}}$

$\displaystyle\to 1 - \frac{1}{e} \qquad \text{bei } c \to \infty$

ii) $\displaystyle\int_c^8 \frac{8x^2 - 5x + 2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_c^8 \big(8x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}}\big)\,dx = \Big[3x^{\frac{8}{3}} - 3x^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}}\Big]_c^8$

$\to 684 \qquad \text{bei } c \to 0\,.$

5. Aufgabe Gegeben ist

$$f : f(x,y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} + xy \qquad \text{für alle } x, y > 0\,.$$

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + y$$

und

$$df(x,y) \;=\; \big(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + y\big)\,dx \;+\; \big(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + y\big)\,dy$$

sowie

$$f(8.03, 0.96) \approx f(8,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(8,1)\cdot 0.03 + \frac{\partial f}{\partial y}(8,1)\cdot(-0.04) = 11 + \frac{13}{12}\cdot 0.03 - \frac{33}{4}\cdot 0.04 = 10.7025$$

6. Aufgabe (4 Punkte) a)

i) $(x + e^{xy})\,dx \;+\; (e^{xy} - y)\,dy =: A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = xe^{xy} \qquad\qquad \frac{\partial B}{\partial y} = ye^{xy} \qquad \text{kein Differential!}$$

ii) $(2x\sinh y + y^4)\,dx \;+\; (x^2\cosh y + 4xy^3)\,dy =: A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2x\cosh y + 4y^3 \qquad\qquad \frac{\partial B}{\partial y} = 2x\cosh y + 4y^3 \qquad \text{Differential!}$$

Stammfunktion: $F(x,y) = x^2\sinh y + xy^4$

b) C sei der Kreis um $(0,0)$ vom Radius 3. Eine Parameterdarstellung ist

$$x(t) = 3\cos t \qquad\qquad y(t) = 3\sin t \qquad\qquad 0 \leqq t \leqq 2\pi\,.$$

Dann gilt für das Kurvenintegral

$$\oint_C (-y+3)\,dx \;+\; (x-4)\,dy \;=\; \int_0^{2\pi} \Big((-3\sin t + 3)(-3sint) + (3\cos t - 4)(3\cos t)\Big)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(9 - 9\sin t - 12\cos t\big)\,dt = 18\pi$$