Aufgabe 1. (Exponentieller Zerfall) Von einem radioaktiven Material mit einer Halbwertszeit von 20 Minuten ist nach einer Stunde noch 1kg vorhanden.

(a) Wieviel Material war zu Beginn vorhanden? (1 Punkt)

(b) Wie groß ist in etwa die Zerfallskonstante des Materials?
[Nützen Sie die *Näherungsformel*: $\ln(2) \approx 0.7$] (1 Punkt)

Aufgabe 2. (Folgen) Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{2n+7}{n+3}$.

(a) Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton wachsend oder fallend? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$. (1 Punkt)

Aufgabe 3. (Iterierte Abbildung) Eine Froschpopulation habe eine Geburtenrate von 50% (pro Kopf und Jahr) und eine Sterberate von 20%. Gleichzeitig werden pro Jahr 300 Frösche von Feinden getötet. Begründen Sie Ihre Antworten bei folgenden Fragen.

(a) Modellieren Sie die Größe x_t der Froschpopulation im Jahr t durch eine lineare Iterierte Abbildung der Form $x_{t+1} = ax_t + b$. (1 Punkt)
[*Ersatzergebnis*: $x_{t+1} = (1.2)x_t - 200$]

(b) Wie lautet der Fixpunkt der Iterierten Abbildung aus (a)? Ist dieser stabil oder instabil? (2 Punkte)
[*Ersatzergebnis*: $x^* = 2000$]

(c) Wie wird sich die Population langfristig entwickeln, wenn es anfangs 900 Frösche sind? (1 Punkt)

(d) Wie lautet die allgemeine Lösung der Iterierten Abbildung aus (a)? (1 Punkt)

(e) Wie lautet die Lösung der Iterierten Abbildung aus (a) zum Anfangswert $x_0 = 1500$? (1 Punkt)

Aufgabe 4. (Kurvendiskussion) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

(a) Was ist der maximale Definitionsbereich von $f(x)$? (1 Punkt)

(b) Wie verhält sich die Funktion für $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \nearrow -1$ und $x \searrow -1$? (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$. (1 Punkt)
[*Ersatzergebnis*: $f'(x) = \left(-\frac{4}{(x+1)^4} + \frac{4}{(x+1)^3}\right) \cdot e^x$]

(d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrema sowie das Monotonieverhalten von $f(x)$. (3 Punkte)

(e) Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graph von f bei $x_0 = 1$? (1 Punkt)

(f) Zeichnen Sie die Tangente *in das beigefügte Koordinatensystem* ein. Skizzieren Sie den Graphen von f anhand der Ergebnisse aus (a) – (e) im selben Koordinatensystem. (2 Punkte)

Aufgabe 5. (Integration) Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)\,dx$, (2 Punkte)

(b) $\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx$, (2 Punkte)

(c) $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$. (1 Punkt)

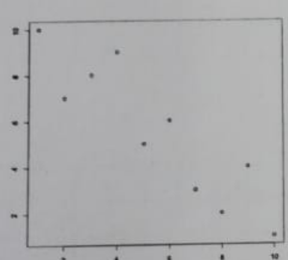
Aufgabe 6. (Statistik)

(a) Eine Messreihe mit $n = 14$ Messungen hatte folgende Ergebnisse x_i:

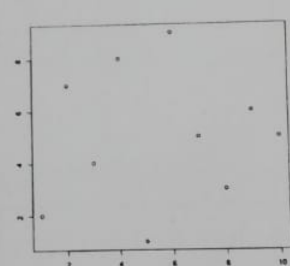
$$\begin{array}{ccccccc} 3.1, & 3.5, & 3.5, & 3.7, & 3.9, & 4.0, & 4.0, \\ 4.1, & 4.5, & 5.0, & 5.2, & 5.9, & 6.0, & 6.6. \end{array}$$

Bestimmen Sie Mittelwert, Median, 0.25-Quantil und 0.75-Quantil der Messreihe.
Hinweis: $\sum_{i=1}^{14} x_i = 63$ (4 Punkte)

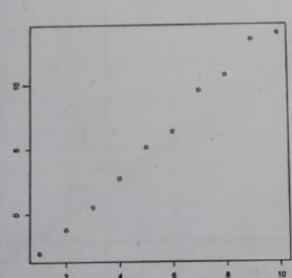
(b) Drei bivariate Messreihen haben die empirischen Korrelationen 0.099, 0.997 bzw. −0.903 und unten stehende Streudiagramme. Welches Streudiagramm gehört zu welcher Korrelation? Geben Sie eine *kurze* Begründung Ihrer Antwort. (2 Punkte)



(α)



(β)

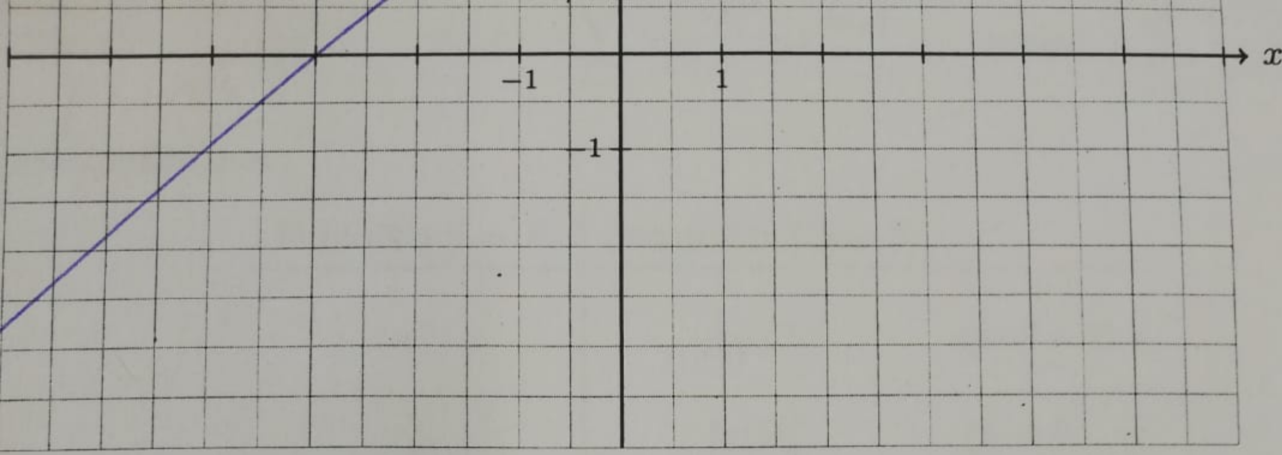


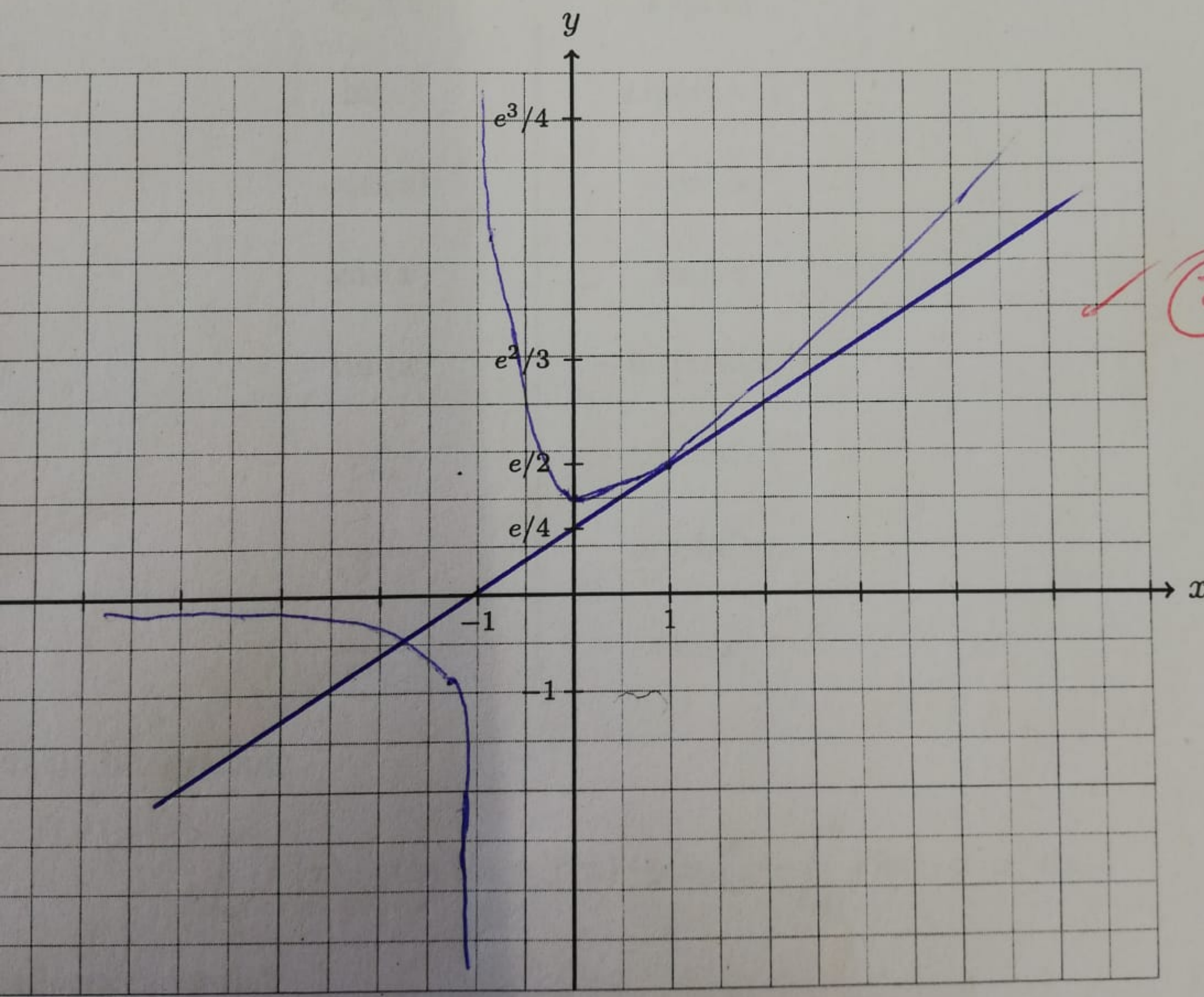
(γ)

Aufgabe 7. (Wahrscheinlichkeitstheorie) Eine Population bestehe zu 70% aus weiblichen und zu 30% aus männlichen Individuen. Von den männlichen Individuen leiden 20% an einer bestimmten Erkrankung K. 4% der Gesamtpopulation sind weiblich und an K erkrankt.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig gewähltes an K erkranktes Individuum männlich? (3 Punkte)

(b) Sind die Ereignisse M = „Individuum ist männlich“ und K = „Individuum ist an K erkrankt“ unabhängig? (1 Punkt)





2

A1

a) $t_{1/2} = 20\,\text{min}$

~~20m~~ $\frac{60\,\text{min}}{20\,\text{min}} = 3$ -> 3 Halbwertszeiten sind vergangen

dh. $x = 1\,\text{kg}$ $\quad x_0 = 2^3 \cdot x = 8 \cdot 1\,\text{kg} = \underline{\underline{8\,\text{kg}}}$ ✓

b) $\alpha = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \approx \frac{0,7}{\frac{1}{3}h} = \underline{\underline{2,1\,\frac{1}{h}}}$ ✓

2

A2

a) $x_1 = \frac{2+7}{4} = \frac{9}{4}$; $x_2 = \frac{11}{5}$; $x_3 = \frac{13}{6}$; $x_4 = \frac{15}{7}$

Vermutung: streng monoton fallend ✓

$x_n > x_{n+1}$

$$\frac{2n+7}{n+3} > \frac{2(n+1)+7}{n+1+3}$$

$$\frac{2n+7}{n+3} > \frac{2n+2+7}{n+4} \quad | \cdot n+4$$

(pos. da $n \in \mathbb{N}$) daher keine änderung des. VZ.

$$| \cdot n+3$$

$$(2n+7)(n+4) > (2n+9)(n+3)$$

(−0,5)

$$\cancel{2n^2} + \cancel{8n} + \cancel{7n} + 28 > \cancel{2n^2} + \cancel{6n} + \cancel{9n} + 12 \quad 27$$

$\underline{\underline{28 > 12}}$ Vermutung ist richtig, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist smf

(−0,5)

b) $$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+7}{n+3} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{7}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \neq \frac{1}{2}$$

$\frac{7}{n} \to 0$, $\frac{3}{n} \to 0$

2/3

A3 [redacted]

a) $x_{t+1} = 1{,}3\,x_t - 300$ ✓

b) $x^* = \frac{b}{1-a} = \frac{-300}{-0{,}3} = 1000$ ✓

Da $|a| > 1$ ist der Fixpunkt instabil ✓

c) $x_0 = 900$

$c = x_0 - \frac{b}{1-a} = 900 - 1000 = -100$

Allg. Lösg.: $x_t = c \cdot a^t + \frac{b}{1-a} = -100 \cdot 1{,}3^t + 1000$

$\lim_{t \to \infty} x_t = \lim_{t \to \infty} \underbrace{-100 \cdot \overset{\to \infty}{1{,}3^t}}_{-\infty} + 1000 = -\infty$

Die Froschpopulation wird absterben ✓

d) $x_t = c \cdot a^t + \frac{b}{1-a} = c \cdot 1{,}3^t + 1000$ ✓

e) $x_t = c \cdot a^t + \frac{b}{1-a}$; $c = x_0 - \frac{b}{1-a} = 1500 - 1000 = 500$

$\underline{= 500 \cdot 1{,}3^t + 1000}$ ✓

A4 [redacted]

a) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ✓ 1

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x \to \infty}{\underbrace{x+1}_{\to \infty}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x \to \infty}{1} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x \to 0}{\underbrace{x+1}_{\to -\infty}} = 0$ ✓ 2

$\lim\limits_{x \nearrow -1} \frac{e^x \to \frac{1}{e}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}} = -\infty$

$\lim\limits_{x \searrow -1} \frac{e^x}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}} = \infty$ ✓ 1

c) $f'(x) = \frac{(x+1)e^x - 1e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x + \cancel{e^x} - \cancel{e^x}}{(x+1)^2}$ ✓ 1

d) $f'(x) = 0 = \frac{xe^x}{(x+1)^2} \to$ $\quad xe^x = 0 \Rightarrow$ für $x = 0 \to$ d.h. Extremum bei $x=0$

~~f(0,001) = e^0,001~~ ~~f(-0,999) = e^-0,999~~

$f(0) = \frac{e^0}{1} = 1$ $\quad$ da $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = \infty$

und die einzige Polstelle bei -1 liegt, handelt es sich um ein Minimum. 1,5

Es liegt keine Monotonie vor. nö.

e) $f'(x_0) = \frac{1 \cdot e^1}{(1+1)^2} = \frac{e}{4}$ $\quad T = mx + t$ $\quad m = \frac{e}{4}$

$f(1) = \frac{e}{2}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \Rightarrow \Delta y = m \cdot \Delta x$

$= \frac{e}{4} \cdot 1 = \frac{e}{4}$ $\quad t = f(1) - \Delta y = \frac{e}{2} - \frac{e}{4} = \frac{e}{4}$

$\Rightarrow T = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$ ✓ 1

A5

a) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)\,dx$

Substit.: $u = x^2$ $\qquad$ ~~$u(\sqrt{\pi/2}) = (\sqrt{\pi/2})^2 = \frac{\pi^2}{4}$~~

$\frac{du}{dx} = 2x \qquad du = 2x\,dx$

$u = (\sqrt{\frac{\pi}{2}})^2 = \frac{\pi}{2}$

$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 0{,}5\cos(x^2)\; 2x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos(u)\,du$

$= \frac{1}{2}\sin(u)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\overset{\to 1}{\sin(\frac{\pi}{2})}}{2} - \frac{\overset{\to 0}{\sin(0)}}{2}$

$= \frac{1}{2}$ ✓

---

partiell: b) $\int_0^{\pi/2} \underset{g(x)}{x}\,\underset{f'(x)}{\cos(x)}\,dx$

$f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x)$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad \cos(0) = 1$

$= x\sin(x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\cdot\sin(x) = \left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin(\frac{\pi}{2}) - 0\right) - \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\overset{\to 0}{\cos(\frac{\pi}{2})} - (-\overset{\to -1}{\cos(0)})\right) =$

$= \frac{\pi}{2} - (+1) = \frac{\pi}{2} - 1$ ✓

$-e^{-x}\,' =$

c) $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty} -\overset{\to 0}{e^{-a}} + e^{-1}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$ ✓

5/5

A6 [redacted]

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

a) 3,1 3,5 3,5 3,7 3,9 4,0 4,0 4,1 4,5 5,0 5,2 5,9 6,0 6,8

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{14} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{63}{14} = 4,5$ Mittelwert $\quad \frac{70}{14}$

$\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_7 + x_8) = 4,05$ Median

$x_{0,25} = x_4 = 3,7$ 0,25-Quantil

$x_{0,75} = x_{11} = 5,2$ 0,75-Quantil

$n \cdot 0,5 = 7$

$n \cdot 0,25 = 3,\ldots$

$n \cdot 0,75 = \frac{14 \cdot 3}{4} = \frac{42}{4} = 10,\ldots$

b) $\gamma \Rightarrow r_{xy} = 0,997$; da starker linear pos. Korr. (x wird größer → y wird größer)

$\alpha \Rightarrow r_{xy} = -0,903$; da ~~ein~~ neg. linearer Zusammenhang

$\beta \Rightarrow r_{xy} = 0,099$; kein linearer Zusammenhang

6/6

A7 [redacted]

m = männl. w = weibl. k = krank

$P(m) = 0{,}3$

$P(w) = 0{,}7$

$P(k|m) = 0{,}2$

$P(k \cap w) = 0{,}04$

$$P(k|w) = \frac{P(k \cap w)}{P(w)} = \frac{0{,}04}{0{,}7}$$

a) Annahme: 100 individuen: 30 männl. ; 70 weibl.

$\downarrow \cdot 0{,}2$ $\quad\downarrow$ $\leftarrow 100 \cdot 0{,}04$

6 krank $\quad$ 4 krank

3

Insges. 10 kranke Individuen, 6 davon männlich, dh.

$\underline{P(m|k) = 0{,}6}$ ✓

b) Nein ~~...~~ warum?

0